Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
  Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
  Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
  Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
  Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på `http://books.google.com`

BRARY
VERSITY OF
ALIFORNIA
AN DIEGO

Digitized by Google

SSE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATEMATISK TIDSSKRIFT

B

07

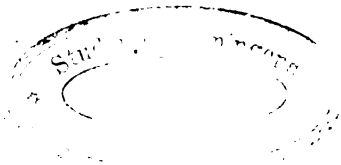
UDGIVET AF

MATEMATISK FORENING I KØBENHAVN

REDIGERET AF

HARALD BORH **T. BONNESEN**

AARGANG 1919



Udgået af Studenterforeningens Bibliotek

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: JUL. GJELLERUPS FORLAG
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)
1919

21
Digitized by Google

Digitized by Google

INDHOLD.

Side

Arwin, A., Phil, Dr., Lund: En Determinantberäkuing 70
Bohr, Prof. v. polyt. Læreanstalt: Om den Hadamardske »Hulsætning« 15
Opgave til Løsning 28
Bonnesen, T., Dr. phil., Prof. v. polyt. Læreanstalt: Se Litteraturanmeldelse.
Hjelmslev, J., Dr. phil., Prof. v. Univ.: Det øjeblikkelige Drejningspunkt. 2
Jensen, J. L. W. V., Phil. Dr. Overingeniør: Opgave til Løsning 48
Jensen K. Løchte: Opgave til Løsning 84
Mittag-Leffler G., Phil. Dr. Professor: Om lineär fortsättning af analytiska funktioner 29
Nørlund, N. E., Dr. phil. Prof. v. Universitetet i Lund:
De Bernoulliske Polynomier 33
De Eulerske Polynomier 49
Redaktionen: Til Tidsskriftets Læsere og Medarbejdere. . 1
Stensig, G. M. cand. mag.: Opgaver til Løsning 84
Sørensen, N. P., cand. mag.: Om Rækkerne $\sum \frac{(2s+1)^q}{s^m(s+1)^m}$ 74
Zeuthen, H. G., Dr. phil. Professor: Om antik Brug af den moderne Irrationalitetstheoris Synsmaader. 65

OPGAVER TIL LØSNING.

Nr. 1. H. Bohr. S. 28. — Nr. 2. J. L. W. V. Jensen. S. 48.
Nr. 3. K. Løchte Jensen. S. 84. — Nr. 4—5. G. M. Stensig. S. 84.

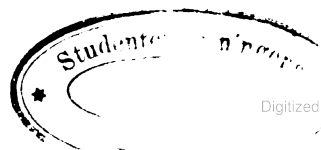
EKSAMENSOPGAVER.

Skoleembedseksamen, Juni 1919 56
1. Del af polyteknisk Eksamen 1918 . . . . . 21, 41
— — 1919 77

LITTERATURANMELDELSER.

Hjelmslev J.: Geometri til Brug ved den polytekniske Læreanstalt. (T. B.). 21

Matematisk Forenings Møder 1918—19 84
Bøger tilsendte Redaktionen 85



Digitized by Google

Digitized by Google

STUDIEBIBLIOTEKET

Til Tidsskriftets Læsere og Medarbejdere.

Ved vor Overtagelse af Redaktionen af Matematisk Tidsskrift, Afd. B, ønsker vi med nogle faa Ord at gøre Rede for vor Opfattelse af Tidsskriftets Opgave og for de Synspunkter, vi vil følge ved dets Ledelse.

Et videnskabeligt Tidsskrift, der som det foreliggende udelukkende henvender sig til den skandinaviske, særlig den danske Læsekreds, maa have en væsentlig anden Opgave end et internationalt Tidsskrift. Formaalet med Matematisk Tidskrift maa være at fremme det matematiske Liv her i Landet og at danne et Bindeled mellem de forskellige matematisk interesserede Kredse i Norden. For at Tidsskriftet skal kunne virke efter dette Formaal, maa dets Artikler kunne læses med Udbytte af alle matematisk Interesserede og ikke blot af Specialforskere paa de paagældende Omraader, og vi vil derfor lægge særlig Vægt paa, at Fremstillingen er klar og letfattelig, og at Udviklingerne knytter sig til det almindelige matematiske Grundlag, der maa anses som Fælleseje for Tidsskriftets Læsere.

Tidsskriftet vil som hidtil bringe mindre Artikler af videnskabelig Karakter og særlig give yngre Forfattere Lejlighed til at meddele Resultaterne af deres Undersøgelser. Som en naturlig Følge af, at Tidsskriftet er overtaget af Matematisk Forening, vil vi søge at knytte det nærmere til denne, og navnlig haaber vi, at Foredragsholderne i Foreningen vil yde Tidsskriftet en værdifuld Støtte ved at sende det kortere, letfattelige Referater af deres Foredrag.

Foruden originale videnskabelige Bidrag vil Tidsskriftet søge ogsaa at bringe sammenfattende Artikler af orienterende Natur om almindeligere Problemer indenfor nyere matematisk Forskning.

Endelig vil Tidsskriftet i Overensstemmelse med sine Traditioner søge at tjene den højere matematiske Undervisning, saavel ved at meddele Eksamensopgaver med Løsninger fra

Digitized by Google

de højere Læreanstalter som ogsaa ved at bringe Bidrag, der kan drage nye Synspunkter for Undervisningen frem, eller som gennem oplysende almindelige Eksempler, speciellere Opgaver eller lignende, kan give Anledning til Øvelse.

Vi vil sluttelig udtrykke Haabet om, at Tidsskriftet ogsaa under den nye Redaktion vil kunne bevare den Støtte, det hidtil har haft, ikke blot her fra Landet, men ogsaa fra de andre skandinaviske Lande.

H. Bohr. *T. Bonnesen.*

Det øjeblikkelige Drejningspunkt.

Af J. Hjelmslev.

1. Som almindelig Forudsætning i den sædvanlige Kinematik gælder det, at Eksistensen af et Punkts Hastighed betragtes som paa Forhaand givet. Tangentbestemmelser betragtes i Hovedsagen som ensbetydende med Hastighedsbestemmelser. At Banekurvens Tangent kan eksistere, uden at Hastigheden eksisterer, eller at omvendt Hastigheden kan eksistere, uden at Tangenten eksisterer, lader man som oftest ude af Betragtning. Man vil vel hævde, at ved virkelig stedfindende Bevægelser vil den nævnte Forudsætning være opfyldt. Hertil skal for det første bemærkes, at ved virkelig stedfindende Bevægelser kan man overhovedet ikke tale om, at visse ved aritmetiske Grænseovergange definerede Betingelser er opfyldt. Men dernæst skal det indrømmes, at den nævnte Paastand jo nok indeholder saa meget rigtigt, at den ved passende Omskrivning kan gøres helt rigtig. Man kan nemlig omskrive den til følgende: Enhver virkelig stedfindende Bevægelse lader sig fremstille ved Afbildning af en aritmetisk defineret Bevægelse i det aritmetiske Rum, i hvilken der eksisterer aritmetisk bestemte Hastigheder (Differentialkvotienter), som ved Afbildning i Størrelse og Retning over paa det virkelige Rum giver Størrelse og Retning af de virkelige praktisk bestemte Hastigheder (som i sig selv ikke er Differentialkvotienter).

Hvilke Begrænsninger, der herved vilde paalægges de aritmetiske Undersøgelsers Rækkevidde, er imidlertid ikke paa

Digitized by Google

Forhaand klart, og hvert enkelt Problem maatte jo i hvert Fald kræve en nøjagtig Undersøgelse og Formulering af de særlige Betingelser, der danner Forudsætningen for de opstillede Resultater. I enkelte Tilfælde vil disse Betingelser være simple og nærliggende. I andre Tilfælde kan de give Anledning til temmelig dybtliggende Undersøgelser. I det følgende skal vi tage et af de simpleste Spørgsmaal i den plane Kinematik, Spørgsmaalet om Eksistensen af det øjeblikkelige Drejningspunkt, lidt nærmere i Betragtning.

2. Vort Udgangspunkt er den sædvanlige Sætning, at 2 ensartet kongruente Figurer i samme Plan kan bringes til Dækning ved en Drejning eller en Parallelforskydning, en Sætning, der simplest føres tilbage til den vigtige Sætning, at enhver Flytning i Planen lader sig sammensætte af 2 Spejlinger.

Lad nu en Bevægelse i Planen være defineret paa en saadan Maade, at 2 Punkter A og B gennemløber givne Kurver (A) og (B), saaledes at Punkterne A og B er entydig og kontinuert afhængige af en stadig voksende kontinuert varierende reel Variabel t (»Tiden«), idet Afstanden AB skal være konstant. Et vilkaarligt tredje Punkt C i fast Forbindelse med A og B vil da ogsaa gennemløbe en Kurve, (C), idet dette Punkts Beliggenhed ligeledes vil være entydig og kontinuert afhængig af t. Det kunde dog tænkes, at Punktet C var fast; dette Tilfælde skal i den følgende Undersøgelse lades ude af Betragtning. Har Kurverne (A) og (B) i de betragtede Punkter A og B bestemte Tangenter, og disse Tangenter ikke begge er vinkelrette paa den rette Linie AB, da vil den tredje Kurve (C) i det tilsvarende Punkt C ogsaa have en bestemt Tangent, i hvert Fald højst med en enkelt Undtagelsesstilling. Lad os nemlig betragte en følgende Stilling $A'B'C'$ (svarende til Tiden t') af Figuren ABC (svarende til Tiden t), og lad Drejningspunktet for de to Figurer være O'. Sidstnævnte Punkt er beliggende paa de vinkelrette paa Midten af AA', BB', CC' *), og da de to første af disse Midtnormaler konvergerer mod bestemte indbyrdes forskellige Grænsestillinger, nemlig Normalerne til Kurverne (A) og (B), naar $t' \to t$, saa følger heraf, at deres Skæringspunkt O' konvergerer mod en bestemt Grænsestilling, nemlig Skæringspunktet O mellem de to nævnte Nor-

*) Saadanne Stillinger, hvor A' falder i A, eller B' i B, eller C' i C, kan overspringes.

Digitized by Google

maler, og heraf følger atter, at Midtnormalen til CC' konvergerer mod en bestemt Grænsestilling CO, idet man dog her maa forudsætte, at C ikke falder i O Endvidere ses det, at da Halvlinierne AA', BB', CC' drejer til samme Side omkring O', saa maa de samtidig konvergere mod saadanne Grænsestillinger, som drejer til samme Side om O. Herved har vi da følgende Resultat:

Naar en uforanderlig plan Figur bevæger sig i sin Plan, og to af Figurens Punkter A og B beskriver Baner med bestemte Tangenter i A og B, hvilke Tangenter ikke begge er vinkelrette paa Linien AB, da vil alle andre Punkter i Planen (med højst een Undtagelse) beskrive Kurver med bestemte Tangenter svarende til Punkternes øjeblikkelige Stillinger.

Samtlige Kurvers Normaler gaar gennem samme Punkt O, Skæringspunktet mellem Normalerne til de af A og B beskrevne Kurver; dette Punkt kaldes det øjeblikkelige Drejningspunkt

Den Bane, som beskrives af det Punkt, der i Øjeblikket falder i O, behøver ikke under de nævnte Forudsætninger at have nogen bestemt Tangent i dette Punkt. Punktet O kan specielt være et fast Punkt.

Dersom A er forskelligt fra O, og den af A beskrevne Kurve har modsat rettede Halvtangenter, da vil det samme være Tilfældet med de Kurver, der beskrives af alle andre Punkter (forskellige fra O), og korresponderende Halvtangenter drejer til samme Side omkring O.

Hertil kan endnu føjes, at enhver ret Linie l i den bevægelige Figur ABC vil have et bestemt Karakteristikpunkt d. e. en bestemt Grænsestilling for Skæringspunktet mellem l og en fra l forskellig følgende Stilling, l', af Linien svarende til Tiden t', idet $t' \to t$. Da O' nemlig har en saadan Beliggenhed, at l ved Drejning om O' kan føres over i l', ses det let, at det søgte Karakteristikpunkt falder i Projektionen af Punktet O ind paa l. Det er dog her en Forudsætning, at O ikke er uendelig fjernt.

Har Kurverne (A) og (B) i A og B kontinuert varierende og i hvert indre Punkt modsat rettede Halvtangenter, vil det

Digitized by Google

samme blive Tilfældet med Tangenterne til de andre Banekurver. Karakteristikpunktet for en ret Linie l, svarende til denne Linies forskellige Stillinger, vil under de nævnte Forudsætninger gennemløbe en Kurve, som imidlertid ikke behøver at have Tangenter, saa at man ikke i Almindelighed kan tale om nogen Indhyllingskurve for l.

3. Det vil efter det foregaaende være let at nævne Eksempler paa Bevægelser, der ikke har noget entydig bestemt øjeblikkeligt Drejningspunkt. Lader man et System af to paa hinanden vinkelrette Linier bevæge sig saaledes, at den ene er Tangent, den anden Normal til en simpel konveks Bue, da vil hertil kun svare et bestemt øjeblikkeligt Drejningspunkt, saafremt Normalen til Buen har et bestemt Karakteristikpunkt. Fremstiller man Buen ved den naturlige Ligning $\theta = f(s)$ (d. v. s. den Ligning, der finder Sted mellem Buelængden s, regnet ud fra det ene Endepunkt til et løbende Punkt paa Buen, og Vinklen θ fra Tangenten i det førstnævnte Punkt til Tangenten i det løbende Punkt), er Betingelsen for, at Karakteristikpunktet eksisterer, den, at $f(s)$ er en differentiabel Funktion. Er $f(s)$ altsaa ikke differentiabel i det betragtede Punkt, eksisterer der ikke noget entydig bestemt øjeblikkeligt Drejningspunkt.

4. Dersom en Linie l i den bevægelige Figur gaar gennem et fast Punkt A, da vil det Punkt af l, der i Øjeblikket falder i A, under den fortsatte Bevægelse enten ligge fast eller beskrive en Kurve, der i A har Linien l til Tangent (følger af Tangentens Definition); i første Tilfælde er A det øjeblikkelige Drejningspunkt, i andet Tilfælde er der i A en bestemt Banetangent l. Er Bevægelsen nærmere bestemt, f. Eks. ved, at et Punkt P, der ikke ligger paa Normalen til l i A beskriver en Kurve med given Tangent, ses det let, at det øjeblikkelige Drejningspunkt er entydig bestemt.

5. Naar der til en bestemt Stilling ABC af en bevægelig Figur ikke svarer noget entydig bestemt øjeblikkeligt Drejningspunkt, kan man tale om flere øjeblikkelige Drejningspunkter, nemlig samtlige Grænsestillinger for Drejningspunktet O', svarende til Figurerne ABC og $A'B'C'$. Man kan da efter det foregaaende opstille følgende Sætninger:

Naar et Punkt A har en entydig bestemt Banetangent l, vil det øjeblikkelige Drejningspunkt være bundet til den vinkelrette paa l i A.

Digitized by Google

Naar en Linie l har et entydig bestemt Karakteristikpunkt A, vil det øjeblikkelige Drejningspunkt være bundet til Normalen til l i A.

Specielt følger heraf, at naar en ret Linie l under Bevægelsen tangerer en fast konveks Bue, vil Normalen til denne Bue i Røringspunktet for l være geometrisk Sted for det øjeblikkelige Drejningspunkt.

6. Som en naturlig Udvidelse af disse Sætninger kunde man tænke sig følgende:

Naar en Kurve φ i den bevægelige Figur stadig skal røre en fast Kurve ψ, er det øjeblikkelige Drejningspunkt for hver Stilling bundet til Kurvernes fælles Normal i Røringspunktet.

Denne Sætning kan imidlertid ikke fastholdes i sin almindelige Form. Der maa opstilles særlige Betingelser for de to Kurver. I det vigtige Tilfælde, hvor φ og ψ er simple konvekse Buer, kan Sætningen ikke en Gang fastholdes. Men man kan bevise følgende Sætning:

Naar en konveks Bue φ i den bevægelige Figur rører en fast konveks Bue ψ, og de to Buer i Røringspunktet vender Konkaviteterne modsat Vej, vil det øjeblikkelige Drejningspunkt være bundet til Kurvernes fælles Normal i Røringspunktet.

Lad Røringspunktet være A, og lad et Par vilkaarlige korresponderende Punkter paa Kurverne φ og ψ være B og C, saaledes at B kommer i C, samtidig med at Tangenten b i B føres over i Tangenten c i C. De to Tangenter antages orienterede saaledes, at Orienteringerne dækker hinanden ved den omtalte Flytning. Der kan nu under Grænseovergangen foreligge 3 forskellige Muligheder med Hensyn til Beliggenheden af sammenhørende Punkter B og C:

1) Buerne AB og AC har modsatte Halvtangenter i A, og dette finder Sted for en uendelig Række sammenhørende Stillinger B og C med Grænsepunktet A. Alle hertil svarende Forbindelseslinier BC konvergerer mod Tangenten i A. Den vinkelrette paa Midten af BC konvergerer samtidig mod Normalen i A. Heraf ses, at de til de nævnte Stillinger af B og C svarende Drejningspunkter alle maa konvergere mod Punkter paa Normalen i A.

2) Buerne AB og AC har samme Halvtangent i A, og dette finder Sted for uendelig mange Par sammenhørende Stil-

Digitized by Google

linger af B og C med Grænsepunkt A. I dette Tilfælde kan intet forudsiges om Grænsestillingerne for Linien BC. Derimod indses det, at Skæringspunktet S mellem de to Tangenter b og c maa konvergere mod A, samtidig med at b og c konvergerer mod Tangenten a i A. b og c skærer nemlig a i 2 saadanne Punkter P og Q, at $\triangle PQS$ faar spidse Vinkler i P og Q, og da baade P og Q konvergerer mod A, vil S ogsaa gøre det (specielt kan P, Q og S falde sammen i eet Punkt, men det forstyrrer jo ikke Resultatet). Den Flytning, der fører B over i C, b i c, vil have sit Drejningspunkt liggende paa Halveringslinien af Nabovinklen til $\angle(bc)$, og denne Halveringslinie konvergerer mod Normalen i A. Altsaa vil det øjeblikkelige Drejningspunkt ogsaa her være bundet til Normalen i A.

3) B eller C falder i A, og dette finder Sted for en uendelig Række af sammenhørende Stillinger B og C med Grænsepunkt A. Forbindelseslinien BC vil da konvergere mod Tangenten i A, og det øjeblikkelige Drejningspunkt er derfor ogsaa i dette Tilfælde bundet til Normalen i A.

Sætningen er hermed bevist. Som man ser, er Hovedsagen den, at man i alle Tilfælde kan være vis paa, at enten vil Linien BC konvergere mod Tangenten i A, eller ogsaa vil Skæringspunktet S mellem b og c konvergere mod A*). I Almindelighed gælder det, at naar en uforanderlig Kurve φ skal bevæge sig saaledes, at den rører en fast Kurve ψ, da vil den nødvendige og tilstrækkelige

---

*) For at forebygge Misforstaaelse af denne disjunktive Betingelse, der i sin Art næppe kan siges at være hyppigt forekommende, skal vi her præcisere Meningen lidt nærmere. Lad samtidige Stillinger B og C gennemløbe de to Fundamentalrækker

$$B_1 B_2 B_3 \ldots \to A,$$
$$C_1 C_2 C_3 \ldots \to A,$$

og lad Tangenterne i de nævnte Punkter være

$$b_1 b_2 b_3 \ldots$$
$$c_1 c_2 c_3 \ldots$$

og Skæringspunkterne mellem sammenhørende Tangenter

$$S_1 S_2 S_3 \ldots$$

Det skal da altid være sikkert, at naar Fundamentalrækkerne for B og C opfylder den Betingelse, at samtlige Grænsestillinger for $B_i C_i$ $(i \to \infty)$ er forskellige fra Tangenten a i A, da skal (for disse samme Fundamentalrækker) Rækken $S_1 S_2 S_3 \ldots$ have eet og kun eet Grænsepunkt, og dette Grænsepunkt skal være A.

Digitized by Google

Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt er bundet til den fælles Normal i Kurvernes Røringspunkt A, være den, at enten konvergerer Forbindelseslinien BC mellem korresponderende Punkter B og C paa de to Kurver mod Tangenten i A, eller ogsaa vil Skæringspunktet mellem Tangenterne i B og C konvergere mod A, naar B og $C \to A$.

7. Vi vil ved et simpelt Eksempel vise, at ingen af de i den foregaaende Sætning nævnte Betingelser behøver at være opfyldt. Lad Kurven φ være bestemt ved Ligningen

$$y = \int_0^x e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2 \frac{1}{x} \, dx,$$

hvor Integranden sættes $= 0$ for $x = 0$, og lad Kurven ψ være X-Aksen, medens Røringspunktet A er Begyndelsespunktet. Punkterne B og C antages bestemt saaledes, at de stadig har samme Abscisse. Under Grænseovergangen $B \to A$ vil Tangenten i B stadig gennemløbe Stillinger parallele med X-Aksen, og Skæringspunktet mellem Tangenten til Kurven φ i B og Tangenten til Kurven ψ i C (d. e. X-Aksen) vil saaledes ikke have nogen bestemt Grænsestilling. Og samtidig har Linien BC en Grænsestilling forskellig fra Tangenten i A.

I det anførte Eksempel kan der, naar der intet paa Forhaand er givet om Forbindelsen mellem B og C, overhovedet intet siges om Bevægelsens øjeblikkelige Drejningspunkter i den givne Stilling. Skæringspunktet mellem Tangenten i B og X-Aksen kan antage alle mulige Grænsestillinger, naar $B \to A$, og ethvert Punkt i Planen kommer med blandt de mulige øjeblikkelige Drejningspunkter.

Det Tilfælde, da den faste Kurve ψ er en ret Linie, er i det hele temmelig let at overse. Man kan herom opstille følgende Sætning, der er specielt indbefattet i den foregaaende almindelige Sætning:

Naar en Kurve φ i den bevægelige Figur skal røre en fast ret Linie ψ, da vil den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt i alle hertil svarende mulige Bevægelser skal være bundet til Kurvens Normal i dens Røringspunkt med den rette Linie, være den, at

Digitized by Google

Tangenten i et variabelt Punkt B, der langs Kurven konvergerer mod A, skærer Tangenten ψ i et Punkt, der konvergerer mod A.

Betingelsen er bl a. opfyldt for alle konvekse Kurver.

Tages den rette Linie ψ til X-Akse, A til Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem, og tænkes φ indenfor et passende Omraade fremstillet ved en Ligning af Formen $y = f(x)$ (hvilket i hvert Fald lader sig gøre, naar Tangenten varierer kontinuert), vil den omtalte Betingelse kunne udtrykkes ved, at

$$\frac{f(x)}{f'(x)} \to 0,$$

naar $x \to 0$.

Er Funktionen $f(x)$ 2 Gange differentiabel og $f''(0) \neq 0$, er Betingelsen opfyldt. Er $f(x)$ r Gange differentiabel ($r > 2$), og $f^{(r)}(0) \neq 0$, er Betingelsen ligeledes opfyldt.

8. En af de vigtigste Sætninger i den plane Kinematik udsiger, at naar en Kurve ruller paa en anden uden at glide, vil det øjeblikkelige Drejningspunkt falde i Kurvernes Rørings-punkt. Beviset for denne Sætning henføres sædvanligvis til en Betragtning af omtrent følgende Indhold: Lad de to Kurver røre hinanden i A, og lad B og C være korresponderende Punkter paa Kurverne under Rulningen. Den Flytning, der fører B over i C, og samtidig Tangenten i B over i Tangenten i C, kan sammensættes af en Drejning om B og Parallelforskydningen BC. Den sidste er »uendelig lille af højere Orden«, altsaa er den elementære Bevægelse en Drejning om A. Hertil er imidlertid, rent bortset fra det uklare Udtryk, at bemærke, at Drejningen om B maaske ogsaa kunde være »uendelig lille af højere Orden«, og i saa Fald kunde man aabenbart faa helt andre Resultater. Lad os betragte et Eksempel:

En Cirkelbue φ og en konveks Bue ψ tænkes defineret ved de naturlige Ligninger

$$\theta = s, \quad \theta = s + s^3 \sin \frac{1}{s} \quad (\theta = 0, \ s = 0),$$

hvor $0 \leqq s \leqq \frac{1}{3}$.

Den sidste Ligning giver

$$\frac{d\theta}{ds} = 1 - s \cos \frac{1}{s} + 3s^2 \sin \frac{1}{s},$$

Digitized by Google

der i det betragtede Interval stadig er positiv, saaledes at Buen ψ virkelig er konveks. Vi lader nu φ rulle paa ψ, idet vi betragter den øjeblikkelige Stilling, hvor Buerne rører hinanden i det til $\theta = 0$, $s = 0$ svarende Punkt A. Korresponderende Punkter B og C paa Buerne vil da svare til samme Værdi af s. Betingelsen for, at Tangenterne i saadanne Punkter skal være parallele, er den, at

$$s = s + s^3 \sin \frac{1}{s},$$

altsaa

$$\sin \frac{1}{s} = 0.$$

Denne Betingelse er opfyldt for

$$s = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots$$

altsaa for en uendelig Række Punkter B med Grænsepunkt A. For alle disse specielle Stillinger af B vil altsaa den Flytning, der ved Rulningen skal føre B over i C, kunne erstattes med en Parallelforskydning. Og det følger da allerede heraf, at den forelagte Bevægelse ikke kan have et entydig bestemt øjeblikkeligt Drejningspunkt i A. Man kunde ganske vist tænke sig den Mulighed, at korresponderende Punkter B og C med parallele Tangenter altid faldt sammen; at dette imidlertid ikke finder Sted, ses ved følgende Ræsonnement: Lad B og C være et Par sammenfaldende korresponderende Punkter med samme Tangent. Paa Buerne BA og CA paa de to Kurver kunde man da altid finde et Par korresponderende Punkter B_1 og C_1, saaledes at Afstanden B_1C_1 antog en Maximumsværdi. I disse Punkter, som sikkert er forskellige, maatte Tangenterne være parallele.

9. Gennem dette Eksempel er det altsaa paavist, at det ovenfor nævnte Ræsonnement ikke er rigtigt. Og den Sætning, som skulde bevises derved, kan ikke fastholdes uden Tilføjelse af særlige Betingelser. Hvilke disse Betingelser er, fremgaar straks af foranstaaende Betragtninger. Er B og C korresponderende Punkter paa de to Kurver, og betegnes Vinklen mellem Tangenterne i disse Punkter (orienterede paa tilsvarende Maade) med α, Afstanden BC med a, vil

$$\frac{a}{\alpha} \longrightarrow 0, \text{ for } B \longrightarrow A,$$

Digitized by Google

være den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt falder i Røringspunktet. Denne Betingelse kan udtrykkes paa mange andre Maader; bl. a. vil den være ensbetydende med, at Radius i den Cirkel, der gaar gennem B og C samt Skæringspunktet mellem de to Tangenter i B og C, skal konvergere mod Nul, naar $B \to A$. Har Punkterne B og C Koordinaterne (x, y) og (x_1, y_1), og danner Tangenterne Vinklerne henholdsvis θ og θ_1 med X-Aksen, kan Betingelsen udtrykkes ved følgende to:

$$\frac{x - x_1}{\theta - \theta_1} \to 0, \quad \frac{y - y_1}{\theta - \theta_1} \to 0.$$

Sættes Buelængden $AB = s$, vil en tilstrækkelig Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt falder i A, være den, at $\theta - \theta_1$ er en afdelingsvis monoton Funktion af s*). Beviset føres saaledes:

Man har:

$$x = \int_0^s \cos\theta\, ds, \quad y = \int_0^s \sin\theta\, ds,$$

$$x_1 = \int_0^s \cos\theta_1\, ds, \quad y_1 = \int_0^s \sin\theta_1\, ds,$$

altsaa

$$x - x_1 = -2\int_0^s \sin\frac{\theta - \theta_1}{2} \sin\frac{\theta + \theta_1}{2}\, ds,$$

$$y - y_1 = \quad 2\int_0^s \sin\frac{\theta - \theta_1}{2} \cos\frac{\theta + \theta_1}{2}\, ds.$$

Da $\theta - \theta_1$, altsaa ogsaa $\frac{\theta - \theta_1}{2}$ og $\sin\frac{\theta - \theta_1}{2}$ i Omegnen af $s = 0$ er monoton, har man

$$|x - x_1| < 2s \sin\frac{|\theta - \theta_1|}{2},$$

$$|y - y_1| < 2s \sin\frac{|\theta - \theta_1|}{2},$$

altsaa

*) Se herom Acta mathematica 40, S. 54—56.

Digitized by Google

$$\frac{x - x_1}{\theta - \theta_1} \to 0, \quad \frac{y - y_1}{\theta - \theta_1} \to 0.$$

Hermed er Sætningen bevist.

Endvidere ses det, at

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} \to 0,$$

hvoraf følger, at Forbindelseslinien BC konvergerer mod Normalen i A.

10. Er den faste Kurve en ret Linie, kan vi benytte denne som X-Akse, Røringspunktet A som Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem. Den rullende Kurve tænkes fremstillet ved Ligningen $y = f(x)$. Punktet B har Koordinaterne (x, y), og Buen AB sættes $= s$. Man vil da som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse for, at A er Bevægelsens øjeblikkelige Drejningspunkt, have:

$$\frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \to 0, \quad \frac{s - x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \to 0,$$

naar $x \to 0$. Den første af disse Betingelser udsiger, at Skæringspunktet mellem Tangenten i B og Tangenten i A skal konvergere mod A, naar $B \to A$. Ved den i 8 omtalte Kurve er Betingelsen ikke opfyldt.

11. Vi vender nu tilbage til den i 6 omtalte Sætning. Vi viste der, at naar en konveks Bue φ bevæger sig saaledes, at den stadig rører en fast konveks Bue ψ, og de to Buer i Røringspunktet vender Konkaviteterne modsat Vej, da vil dette være en tilstrækkelig Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt er bundet til Kurvernes fælles Normal Men naar Konkaviteterne vender samme Vej, bliver Forholdene mere indviklede. Lad os som tidligere betegne Røringspunktet med A, et Par korresponderende Punkter med B og C. Har Buerne AB og AC modsat Halvtangent i A, eller et af Punkterne B og C falder i A, er der ingen Tvivl om, at Grænsestillingen for BC vil blive Tangenten i A. Men naar Buerne AB og AC har samme Halvtangent, maa der aabenbart stilles visse yderligere Betingelser til Kurverne. Tangenten i A benyttes som X-Akse, A som Begyndelsespunkt i et retvinklet Koordinatsystem, og Kurverne φ og ψ fremstilles ved de naturlige Ligninger

Digitized by Google

$$\theta = \theta(s), \quad \theta_1 = \theta_1(s),$$

hvor $\theta(s)$ og $\theta_1(s)$ er stedse voksende Funktioner. Vi forudsætter nu, at $\theta(s) - \theta_1(s)$ er en afdelingsvis monoton Funktion, altsaa i Omegnen af $s = 0$ en monoton Funktion. Lad den være voksende, altsaa positiv.

Et vilkaarligt Par korresponderende Punkter er B og C; Tangenterne i disse Punkter er b og c, deres Skæringspunkt S. Det gælder da om at undersøge Betingelserne for at $S \to A$, naar BC konvergerer mod en Retning forskellig fra Tangenten i A. Ved Anvendelse af sinus-Relationen paa $\triangle SBC$ ses det straks, at Betingelsen vil være

$$\frac{\angle(bc)}{BC} \to \infty.$$

Er Buen $AB =$ Buen AC, og dette finder Sted gennem de Fundamentalrækker B og C beskriver, vil Betingelsen være opfyldt (9). Er de to Buer ikke lige store, kan man paa Kurven ψ afsætte en Bue $AD =$ Buen AB. Idet Tangenten i D betegnes med d, vil man da have

$$\frac{\angle(bd)}{BD} \to \infty.$$

Vi vil nu til vore oprindelige Forudsætninger føje den, at den numeriske Værdi af Forholdet

$$\frac{\angle(cd)}{CD} < \varkappa,$$

hvor $\varkappa$ er en Konstant, idet den nævnte Ulighed skal gælde for enhver Beliggenhed af 2 indbyrdes forskellige Punkter C og D med deres Tangenter c og d, inden for en vis lille Bue AM af Kurven ψ.

Da nu $\triangle BCD$ ved Grænseovergangen mod A har en bestemt Repræsentant, idet Siderne konvergerer mod bestemte Retninger, den ene CD mod Tangenten i a, de to andre mod bestemte Retninger forskellige fra Tangenten, har man

$$\frac{\angle(bd)}{BC} = \frac{\angle(bd)}{BD} \cdot \frac{BD}{BC} \to \infty,$$

$$\frac{\angle(cd)}{BC} = \frac{\angle(cd)}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} < \varkappa_1,$$

hvor $\varkappa_1$ er en Konstant.

Digitized by Google

Heraf følger imidlertid ved Addition eller Subtraktion, at

$$\frac{\angle (bc)}{\overline{BC}} \to \infty .$$

De opstillede Betingelser er altsaa tilstrækkelige.

Foruden den Betingelse, at $\theta - \theta_1$ skal være en voksende Funktion, har vi forudsat, at Forholdet mellem $\angle (cd)$ og Buen CD skal være begrænset d. v. s. at Middelkrumningen af Kurven ψ i Omegnen af A skal være begrænset. Vi kan saaledes til Slut opstille følgende Sætning:

Naar en uforanderlig konveks Bue φ bevæger sig saaledes, at den stadig rører en fast konveks Bue ψ, da vil en tilstrækkelig Betingelse for, at det øjeblikkelige Drejningspunkt skal være bundet til Kurvernes fælles Normal i Røringspunktet, være den, 1) at Kurverne vender Konkaviteterne modsat Vej, eller den, 2) at Kurverne, naar de vender Konkaviteterne samme Vej, kan fremstilles ved naturlige Ligninger

$$\theta = \theta (s), \quad \theta_1 = \theta_1 (s),$$

hvor $\theta - \theta_1$ er en afdelingsvis monoton Funktion, samtidig med, at Kurvernes Middelkrumninger er begrænsede.

Saafremt Kurverne har bestemte Krumningsradier, betyder den sidste Betingelse kun, at samtlige Krumningsradier er forskellige fra Nul.

12. Med Hensyn til Anvendelser paa virkelig stedfindende Bevægelser er det klart, at de i 9 og 11 fremsatte Betingelser rummer alt, hvad der kræves. I Praksis vil der aldrig kunne opstaa nogen anden Ubestemthed i »den øjeblikkelige Drejning« end den, der ligger i, at de to Kurver ikke har et enkelt Punkt, men et helt Stykke fælles. Naar dette Stykke antager særlig store Dimensioner, vil der blive en kendelig Forskel paa frem- og tilbagegaaende Banetangenter, saaledes at der viser sig et Knæk paa Banerne. I Anvendelserne vil man altsaa ikke faa nogen særlig Anledning til at beskæftige sig med de i det foregaaende nævnte »Undtagelsestilfælde«. Men det gælder jo alle Spørgsmaal vedrørende Ophobninger af Singulariteter. I alle Undersøgelser, der har Praksis som endeligt Maal, spiller de kun en Rolle i »Mellemregninger«.

Digitized by Google

Om den Hadamard'ske »Hulsætning«.

Af Harald Bohr.

1. Lad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

være en Potensrække i den komplekse Variable $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$, om hvilken Række vi vil antage, at den har en endelig og fra Nul forskellig Konvergensradius ρ. Funktionen $f(z)$ er da regulær analytisk i hele det Indre af Konvergenscirklen $|z| = \rho$, og Rækken kan her differentieres et vilkaarligt Antal Gange ledvis, d. v. s. der gælder for ethvert $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ Ligningen

$$f^{(\nu)}(z) = \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\, a_n z^{n-\nu} \quad (|z| < \rho). \tag{2}$$

Derimod findes der altid paa selve Konvergenscirklen $|z| = \rho$ mindst et Punkt, hvori Funktionen $f(z)$ er singulær. For at afgøre, hvorvidt et vilkaarligt givet Punkt $a = \rho \cdot e^{i\theta_0}$ paa Konvergenscirklen $|z| = \rho$ er et regulært eller et singulært Punkt for $f(z)$, kan man f. Eks. betragte den *Taylor*'ske Rækkeudvikling for $f(z)$ udfra Punktet $\frac{a}{2}$, altsaa Potensrækkeudviklingen i den Variable $\left(z - \frac{a}{2}\right)$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}\left(\frac{a}{2}\right)}{\nu!} \left(z - \frac{a}{2}\right)^{\nu}, \tag{3}$$

der jo som bekendt i hvert Fald er konvergent indenfor den Cirkel med Centrum i Punktet $\frac{a}{2}$, der berører den oprindelige Konvergenscirkel $|z| = \rho$ i Punktet a; det gælder da, at dersom denne Potensrække (3) i den Variable $z - \frac{a}{2}$ har sin Konvergensradius ρ_1 netop lig med $\left|\frac{a}{2}\right|$, vil Punktet a være et singulært Punkt for $f(z)$, medens a vil være et regulært Punkt for $f(z)$, hvis ρ_1 er større end $\left|\frac{a}{2}\right|$.

Digitized by Google

2. Ved Hjælp af denne Metode til Afgørelse af, hvorvidt et paa en Potensrækkes Konvergenscirkel beliggende Punkt er regulært eller singulært for den ved Rækken fremstillede analytiske Funktion, kan man, som bemærket af *Landau**), umiddelbart bevise følgende vigtige Sætning af *Vivanti*.

Sætning I. Er i en Potensrække (1) med Konvergensradius ρ alle Koefficienterne a_n reelle Tal $\geqq 0$, da er det Punkt ρ paa Konvergenscirklen, hvori denne skæres af den positive Halvakse, altid et singulært Punkt for Funktionen $f(z)$.

Bevis. Vi fører Beviset indirekte og antager altsaa, at Punktet ρ var et regulært Punkt for $f(z)$; da vilde Potensrækken i den Variable $\left(z-\frac{\rho}{2}\right)$

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\nu!}\left(z-\frac{\rho}{2}\right)^{\nu}$$

have sin Konvergensradius $>\frac{\rho}{2}$ og altsaa for et tilstrækkeligt lille $\varepsilon>0$ være konvergent i Punktet $z=\rho+\varepsilon$, d. v. s. Rækken

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\nu!}\left(\frac{\rho}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}$$

vilde være konvergent. Nu er imidlertid i Følge Formel (2)

$$\frac{f^{(\nu)}\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\nu!}=\sum_{n=\nu}^{\infty}\binom{n}{\nu}a_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-\nu},$$

og Dobbeltrækken

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=\nu}^{\infty}\binom{n}{\nu}a_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-\nu}\left(\frac{\rho}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}$$

(hvor Summationen først skal udføres efter n, derefter efter ν) vilde altsaa være konvergent. I denne Dobbeltrække er imid-

*) Angaaende Litteraturen henvises Læseren til den nylig udkomne lille Bog af *E. Landau*: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin, 1916.

Digitized by Google

lertid alle Leddene ≥ 0, og vi kan derfor anvende en kendt Sætning om Dobbeltrækker med positive Led, der udsiger, at dersom alle Størrelserne $\alpha_{n,\nu}$ er ≥ 0 og Dobbeltrækken

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n,\nu} \tag{4}$$

er konvergent (med Summen A), da vil den nye Dobbeltrække

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n,\nu},$$

der fremkommer ved Ombytning af Summationsordenen, paany være konvergent (og ligeledes have Summen A). Vi finder altsaa, at Dobbeltrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n-\nu}\left(\frac{\rho}{2}+\varepsilon\right)^{\nu}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}{\frac{\rho}{2}}\right)^{\nu}.$$

vilde være konvergent, d. v. s. at Rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{\rho}{2}\right)^{n}\left(1+\frac{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}{\frac{\rho}{2}}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\rho+\varepsilon)^{n}$$

vilde være konvergent; men dette Resultat er øjensynlig i Strid med, at den givne Potensrække (1) har Konvergensradius ρ, idet det jo udsiger, at Rækken (1) er konvergent i Punktet $(\rho+\varepsilon)$ udenfor Konvergenscirklen.

Vi tilføjer til Orientering, at den Omstændighed, at man ved de benyttede Omskrivninger (Summationsordenens Ombytning) rent formelt kommer til Potensrækken i Punktet $\rho+\varepsilon$, naturligvis ikke er andet, end hvad man paa Forhaand maatte vente; Bevisets Idé ligger alene deri, at disse formelle Regninger under den givne Forudsætning $a_n \geq 0$ faar reel Gyldighed.

Digitized by Google

Den ovenfor benyttede Hjælpesætning om, at Summationsordenen i en Dobbeltrække (4) er ligegyldig, bevarer som bekendt sin Gyldighed, selvom Forudsætningen om, at alle Tallene $\alpha_{n,\nu}$ skal være positive, erstattes af den (mindre) Forudsætning, at disse Tal, opfattet som Vektorer i en kompleks Plan, skal være blot »væsentlig ensrettede«, d. v. s. at alle Punkter (Tal) $\alpha_{n,\nu}$ skal ligge i et fast Vinkelrum $Re^{i\Theta}$, karakteriseret ved Ulighederne $R \geqq 0$, $V < \Theta < W$, hvor $W - V < \pi$; heraf følger umiddelbart (som et Blik paa det ovenstaaende Bevis viser), at Sætning I kan generaliseres til følgende Sætning, den saakaldte *Vivanti-Dienes*'ske Sætning.

Sætning II. Er i en Potensrække (1) med Konvergensradius ρ alle Koefficienterne a_n beliggende i et Vinkelrum $Re^{i\Theta}$, $R \geqq 0$, $V < \Theta < W$, hvor $W - V < \pi$, da vil Punktet $z = \rho$ være et singulært Punkt for Funktionen $f(z)$.

Heraf følger atter (ved Transformationen $z = z_1 \cdot e^{i\theta_0}$), at hvis θ_0 er et saadant reelt Tal, at alle Tallene $a_n e^{in\theta_0}$ ligger i et fast Vinkelrum, hvis Vinkelaabning er $< \pi$, da vil Punktet $\rho e^{i\theta_0}$ være et singulært Punkt for $f(z)$, eller i lidt anden Formulering:

Sætning III. Er z_0 et saadant Punkt paa Konvergenscirklen $|z| = \rho$, at i dette Punkt alle Leddene $a_n z_0^n$ — eller, hvad der i denne Sammenhæng naturligvis kommer ud paa det samme, alle Leddene $a_n z_0^n$ fra et vist Trin af, d. v. s. for $n > N$ — er beliggende i et Vinkelrum $Re^{i\Theta}$, $R \geqq 0$, $V < \Theta < W$, hvor $W - V < \pi$, da vil Punktet z_0 være et singulært Punkt for Funktionen $f(z)$.

3. Den ved en Potensrække fremstillede analytiske Funktion siges at have Konvergenscirklen $|z| = \rho$ til naturlig Grænse, dersom alle Punkter paa Konvergenscirklen er singulære Punkter for $f(z)$. Af stor Interesse er her en Sætning af *Hadamard*, der har faaet Navnet den Hadamard'ske »Hulsætning«, fordi den handler om Potensrækker, i hvis Koefficientfølge $a_0, a_1, a_2, \cdots$ der er store »Huller«, d. v. s. hvor talrige Koefficienter har Værdien Nul. Idet vi kun opskriver de Led $a_n z^n$, for hvilke $a_n \neq 0$, kan denne Sætning formuleres saaledes:

Digitized by Google

Hadamard's Sætning. For enhver Potensrække

$$F(z) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{m_p} z^{m_p} \qquad (0 \leqq m_1 < m_2 < \cdots), \qquad (5)$$

der opfylder Betingelsen

$$\frac{m_{p+1}}{m_p} > k \qquad (p = 1, 2, 3, \cdots),$$

hvor k er en Konstant > 1, er Konvergenscirklen $|z| = \rho$ den naturlige Grænse for Funktionen $F(z)$.

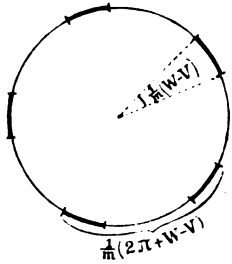
Der er af forskellige Matematikere givet Beviser for denne Sætning, hvilke Beviser imidlertid alle er meget sammensatte og derved ret vanskelige at gennemskue. Det er maaske derfor af nogen Interesse at vise, hvorledes den *Hadamard*'ske Sætning i et Specialtilfælde, nemlig naar Konstanten k er > 3, uden Vanskelighed kan bevises ved Hjælp af den *Vivanti-Dienes*'ske Sætning III, hvorved man, som det vil fremgaa af det Følgende, faar et overmaade anskueligt Bevis for Sætningen i dette Tilfælde.

Bevis for Hadamard's Sætning i Tilfældet $k > 3$. For at bevise, at Konvergenscirklen $|z| = \rho$ er den naturlige Grænse for den ved Potensrækken (5) fremstillede Funktion $F(z)$, altsaa at alle Punkter paa denne Cirkel er singulære, er det tilstrækkeligt at vise, at de singulære Punkter ligger overalt tæt paa Cirklen $|z| = \rho$, d. v. s. at der paa enhver (selv nok saa lille) Bue B af Konvergenscirklen findes et singulært Punkt; thi heraf vil følge, at ethvert Punkt af Cirklen er singulært, idet jo et Fortætningspunkt for singulære Punkter selv er et singulært Punkt.

Vi betragter et vilkaarligt Led $a_m z^m$ i Potensrækken (5); lader vi z gennemløbe Konvergenscirklen $|z| = \rho$ een Gang, i positiv Omløbsretning og med konstant Vinkelhastighed, vil Størrelsen $Z = a_m z^m$ aabenbart gennemløbe Cirklen $Z = |a_m| \cdot \rho^m$ netop m Gange i positiv Omløbsretning og med en Vinkelhastighed, der er m Gange saa stor som den, hvormed z gennemløber sin Cirkel $|z| = \rho$. Heraf følger, at de Punkter z paa Konvergenscirklen $|z| = \rho$, for hvilke det gælder, at Punktet $Z = a_m z^m$ ligger i et givet Vinkelrum $Re^{i\Theta}$, $R \geqq 0$, $V < \Theta < W$, hvor $W - V < \pi$, vil udfylde m lige store og over Cirklen $|z| = \rho$ jævnt fordelte Buer, der hver har Vinkelstørrelsen

Digitized by Google

$\frac{1}{m}(W-V)$ (de stærkt optrukne Buer paa Figuren, der svarer til $m=5$). Vi slutter heraf (se Figuren), at enhver Bue paa Cirklen $|z|=\rho$, hvis Vinkelstørrelse er større end



$$\frac{2\pi+W-V}{m}$$

i sit Indre helt indeholder mindst en af de nævnte m Buer, i hvis Punkter det gælder, at $a_m z^m$ ligger i det givne Vinkelrum $V<\Theta<W$.

Vi kan nu uden Vanskelighed (ved Hjælp af Sætning III) bevise, at der paa den vilkaarligt givne Bue B af Cirklen $|z|=\rho$ virkelig ligger et singulært Punkt z_0 for Funktionen $F(z)$, idet vi kan vise, at der paa denne Bue findes et saadant Punkt z_0, at alle Leddene $a_{m_p} z_0^{m_p}$ fra et vist Trin af ligger i et fast Vinkelrum $V<\Theta<W$, hvor Tallene V og W er valgt saadan, at Differensen $W-V$ vel er mindre end π, men er saa lidt mindre end π, at

$$\frac{2\pi+W-V}{W-V}<k,$$

hvad der er muligt, fordi Konstanten k i Følge Forudsætning er >3.

Efter at dette Vinkelrum $V<\Theta<W$ er fastlagt, bestemmer vi det hele Tal P saa stort, at

$$\frac{2\pi+W-V}{m_P}<\beta,$$

hvor β betegner Vinkelstørrelsen af den paa Konvergenscirklen $|z|=\rho$ givne Bue B; da vil i Følge en Bemærkning ovenfor Buen B helt indeholde en Bue B_P af Vinkelstørrelsen $\frac{1}{m_P}(W-V)$, i hvis Punkter z det gælder, at Størrelsen $a_{m_P} z^{m_P}$ ligger i det fastlagte Vinkelrum $V<\Theta<W$. Nu er imidlertid

$$\frac{m_{P+1}}{m_P}>k \quad \text{og} \quad \frac{2\pi+W-V}{W-V}<k,$$

altsaa

Digitized by Google

$$\frac{W-V}{m_P} > \frac{2\pi + W-V}{m_{P+1}},$$

og vi kan derfor paa Buen B_P af Vinkelstørrelsen $\frac{1}{m_P}(W-V)$ bestemme en Delbue B_{P+1} af Vinkelstørrelsen $\frac{1}{m_{P+1}}(W-V)$, i hvis Punkter z det gælder, at det næste Led $a_{m_{P+1}} z^{m_{P+1}}$ ligeledes ligger i Vinkelrummet $V < \Theta < W$. Dernæst bestemmer vi paa denne Bue B_{P+1} en Delbue B_{P+2}, i hvis Punkter det gælder, at Leddet $a_{m_{P+2}} z^{m_{P+2}}$ ligger i Vinkelrummet $V < \Theta < W$, o. s. v.; paa denne Maade kan vi fortsætte ubegrænset, fordi der hele Tiden (d. v. s. for ethvert $p = P, P+1, P+2, \cdots$) gælder Uligheden

$$\frac{W-V}{m_p} > \frac{2\pi + W-V}{m_{p+1}}.$$

Den saaledes bestemte Følge af Cirkelbuer

$$B_P, B_{P+1}, B_{P+2}, \cdots B_p, \cdots,$$

af hvilke enhver er helt indeholdt i den foregaaende, og hvis Længder $\frac{1}{m_p}(W-V)$ gaar mod Nul for $p \to \infty$, vil for $p \to \infty$ trække sig sammen om et bestemt Punkt z_0 paa den givne Bue B, og idet dette Punkt z_0 ligger paa alle Buerne B_p $(p \geq P)$, vil alle Leddene $a_{m_p} z_0^{m_p}$ $(p \geq P)$ ligge i Vinkelrummet $V < \Theta < W$, hvormed er bevist, at Punktet z_0 er et singulært Punkt for Funktionen $F(z)$.

Literaturanmeldelse.

J. Hjelmslev: Lærebog i Geometri til Brug ved den polytekniske Læreanstalt. København 1918. (Jul. Gjellerups Forlag). 303 S.

Denne nye Lærebog tjener til Afløsning af Forfatterens bekendte i 1904 udgivne »Deskriptiv Geometri«, men afviger baade i Indre og Ydre fra sin Forgænger. Forandringen i Titel skyldes den Ændring i Læreanstaltens matematiske Læse-

Digitized by Google

plan, at en Del af det geometriske Pensum, som tidligere medtoges under Analysen, nu er henlagt under Læreren i Geometri, og man vil saaledes i denne Lærebog finde en analytisk Fremstilling af Krumningsteorien for Kurver og Flader. Det skyldes ligeledes en Omlægning af Undervisningen, at den almindelige Lære om enkelt og dobbelt retvinklet Afbildning er optaget i Bogen. Til Gengæld er en Del bortfaldet, saaledes den rent geometriske Paavisning af de forskellige Arter af Keglesnitsflader, idet denne Inddeling tænkes foretaget i Analysen. Specielle Flader som Cylindroiden og Biais passé omtales ikke og efterlader vel heller intet Savn. I ydre Henseende har Bogen vundet ved Figurernes Optagelse i selve Teksten.

Bogen er skrevet i et naturligt og klart Sprog, og gennemgaaende er det lykkedes Forfatteren at faa sagt alt væsentligt i knappe Vendinger, selv om det forekommer Anmelderen, at Fremstillingen paa sine Steder er lovlig kortfattet.

Professor Hjelmslev har som bekendt forelagt den matematiske Verden en Række geometriske Undersøgelser, som forfølger to forskellige Tankeretninger, idet han dels har skærpet og simplificeret den eksakte Teori for de ad analytisk Vej definerede geometriske Former, dels fra Grunden har opbygget en Lære om »Virkelighedens Geometri« eller Geometrien i Tegneplanen. Disse nye Synspunkter præger, som det var at vente, i høj Grad den foreliggende Bog, hvis første og største Del bygger paa Geometrien i Tegneplanen, hvilket er naturligt i en Lærebog for tegnende Ingeniører, medens den sidste Tredjedel indeholder den teoretiske Infinitesimalgeometri. Selvfølgelig er ogsaa Konstruktion ved Eksperiment indført straks i Indledningen, og Erfaringen viser, at Anvendelsen af Flytteplanen giver Elever Anledning til en ikke ringe Opfindsomhed.

Geometrien i Tegneplanen bygger ikke paa de sædvanlige geometrisk Abstraktioner, men opererer med de virkelige, med Blyant tegnede Figurer. Denne Geometris Begyndelsesgrunde har Forfatteren givet i sin »Elementær Geometri«, en Bog, som træder i direkte Modsætning til Euklid, hvis Elementer jo netop behandler de samme Linier og Cirkler, som den analytiske Geometri arbejder med. Det er et lignende Modsætningsforhold som det, Felix Klein i en Forelæsningsrække har karakteriseret med Ordene Approksimations- og Præcisionsmatematik. Men de to Matematikeres Synspunkter falder dog

Digitized by Google

ikke sammen. Ifølge Hjelmslev skal Forholdet ikke opfattes saaledes, at den praktiske Geometri kun giver en Tilnærmelse til den »eksakte«, aritmetiske Geometris Bestemmelser. Tværtimod beror disses Brugbarhed paa, at de er i Overensstemmelse med de virkelige Forhold. Eksempelvis har den teoretisk beregnede Værdi af π Betydning, fordi den er i Overensstemmelse med virkelige Maalinger eller med andre Ord, fordi en indskreven regulær Polygon med tilstrækkelig mange Sider faktisk falder sammen med Cirkelperiferien.

Tangenten til en tegnet Kurve defineres som en Linie, der har det størst mulige Liniestykke fælles med Kurven, idet man med Linealen prøver, om det er muligt at tegne en Linie, som har det samme Stykke og endnu mere fælles med Kurven. Tangenten har da intet bestemt Røringspunkt, og i et givet Punkt findes ingen bestemt Tangent. Tilsvarende Definitioner gives med Hensyn til den praktiske Krumningscirkel. Betydningen af disse Definitioner belyses ved en Sammenligning mellem den praktiske og den teoretiske Krumningscirkel i en Ellipses Toppunkt, idet man beregner Radius i en Cirkel, som følger Ellipsen saa langt som muligt ud fra den Forudsætning, at man har opgivet den lavere Grænse for de Afstande, som kan afsættes i Tegneplanen. Det viser sig da, at de to Krumningscirkler har forskellige Radier. Allerede paa dette Punkt synes det imidlertid, som om Forfatteren har forladt Virkelighedens Geometri i dens rene Skikkelse og er gaaet over til Approksimationsmatematiken. Ellipsen er jo nemlig ikke en tegnet, men en analytisk defineret Kurve, hvis Ligning benyttes ved den nævnte Beregning; og det gælder netop om at faa Ellipsen tegnet saaledes, at den saa nøje som i Tegneplanen muligt slutter sig til den aritmetiske Kurve. Og dette sker ved de praktiske Krumningscirkler.

Ogsaa ved Overgangen fra Planen til Rummet viser der sig Vanskeligheder ved Virkelighedsgeometrien. I Planen tegnes en Cirkel med en Passer, men hvorledes frembringes en virkelig Kugleflade, og hvorledes prøver man om dens Punkter har samme Afstand fra Centrum. Gaar Teorien ikke her forud for Virkeligheden? En Rumkurve defineres som Skæringslinie (virkeligere: Sammenstødslinie) mellem to Flader; dens Tangent defineres som den plane Kurves, og dens oskulerende Plan som den, der indeholder saa stort et Kurvestykke som muligt. Kan man nu sige, at denne Definition hører hjemme i Virke-

Digitized by Google

ligheden? I Betragtning af, at Rumkurven i Almindelighed vil gaa igennem den oskulerende Plan, vil det være forbundet med visse Vanskeligheder at lægge en praktisk Plan som oskulerende Plan til Kurven. Definitionen er derfor mere en teoretisk Analogidannelse end en Virkelighedsdefinition. En anden Sag er, at disse Betragtningsmaader baade er meget anskuelige og anvendelige, idet de paa en simpel Maade giver Midler til Bestemmelse af Krumningscirkler til visse Skæringskurver paa et tidligt Tidspunkt.

Paa dette Punkt griber Bogen direkte ind i den praktiske Tegnings Metoder ved i visse Tilfælde at give Anvisning paa Anvendelse af Krumningscirkler til Tegning af Buestykker i Stedet for den møjsommelige og mindre nøjagtige Punktbestemmelse. Som Eksempler herpaa findes Tegninger af nogle Maskindele. Det lille Afsnit om Skitsering maa ogsaa være af Værdi for den praktiske Tegner saavel som for Lærere i Stereometri.

Infinitesimalgeometrien i 2. Afsnit baseres paa den Sætning, at en Trekant, hvis Vinkelspidser konvergerer mod et bestemt Punkt, medens Siderne konvergerer mod bestemte, forskellige Grænsestillinger, vil have bestemte Grænsevinkler og derfor bestemte Grænseforhold mellem Siderne. En vilkaarlig Trekant med disse Vinkler betragtes som Repræsentant for den uendelig lille Trekant. De særlige Tilfælde med sammenfaldende Sider betragtes særskilt. Denne Indførelse af Repræsentanter for uendelig smaa Figurer er vel ikke i og for sig noget nyt, men der er ved den almindelige Form, Forfatteren har givet Sætningen, opnaaet en Fasthed ved Grænseovergangen, som virker meget velgørende ved Anvendelserne (se f. Eks. Bestemmelsen af Fladers Tangentplaner og Meuniers Teorem). Specielt betragtes en bevægelig Linie, som konvergerer mod en bestemt Grænsestilling A. Det paavises, at de Stykker, som afskæres paa vilkaarlige faste Linier i Planen mellem A og en Nabolinie A_1, vil have bestemte Grænseforhold, hvis dette er Tilfældet for to bestemte Linier. De afskaarne uendelig smaa Liniestykker repræsenteres ved endelige Liniestykker med de fundne Forhold, og det viser sig, at Repræsentanterne paa Linier gennem samme Punkt a paa A har deres Endepunkter paa en Linie parallel med A, den til a svarende Ledelinie. Ledeliniernes indbyrdes Afstande er proportionale med Afstandene mellem de tilsvarende Punkter a.

Digitized by Google

Skæres A med en Række Paralleler, vil Repræsentanterne for de paa disse afskaarne Stykker derfor have deres Endepunkter paa en ret Linie B, som skærer A i et Punkt k, Karakteristikpunktet, hvis tilsvarende Ledelinie netop er A. Dette vil i den almindelige Udtryksmaade sige, at de Stykker, som afskæres mellem A og A_1 paa Linier gennem k (forskellige fra A) er uendelig smaa af højere Orden. Afstanden mellem k og Skæringspunktet AA_1 kan derimod have en Repræsentant forskellig fra 0. Det geometriske Sted for k, idet A gennemløber det givne Liniesystem, er Systemets Indhyllingskurve. I Eksempler er vist, hvorledes man kan undersøge, om Indhyllingskurven rører A. Vi nævner her den elegante Konstruktion af Ellipsens Krumningscentrum og Evolut; Konstruktionen fører direkte til Mannheims, men den er at foretrække, fordi den udledes af mere almindelige Principper. Iøvrigt vilde nogle flere simple Tekstéksempler til denne Teori have virket heldigt.

Den ovenfor skitserede Lære om en Linies infinitesimale Bevægelse i Planen udvides (grumme kortfattet) til Rummet og danner Grundlaget for Læren om vindskæve Flader. Endelig anvendes Metoden overfor et System af Planer med Bestemmelse af Karakteristiklinie og Indhyllingsflade. Denne behandles ogsaa analytisk, hvilket ikke er Tilfældet med Indhyllingskurven. For vilkaarlige Kurvesystemer i Planen er Indhyllingsteorien skitseret.

Udgangspunktet for den almindelige Kurveteori er Læren om den konvekse, plane Bue. Af Konveksiteten udledes Tangentens Eksistens. Den konvekse Bue deles i simple Buer med en Totalkrumning $< 180^0$, og disse deles i Normbuer, hvis Krumning varierer monotont. Krumningen bestemmes ud fra Buens naturlige Ligning, og den fra »Geometriske Eksperimenter« kendte smukke Fremstilling af Afviklerteorien er medtaget. Tillige gives Betingelsen for, at en simpel Bue har en Evolut. Rumkurver behandles ud fra lignende Synspunkter. Ny er her forskellige Bestemmelser af den oskulerende Plan og særlig Indførelsen af den oskulerende Halvplan, hvilken i Korthed kan siges at være den Halvplan, som indeholder den nærmeste Omegn af Kurven. Endvidere benyttes Retningskeglen og Indikatriks systematisk til Simplifikation af Teorien, særlig ved Undersøgelsen af Tangentfladen til en simpel Bue. Udseendet af Tangentfladens Skæringskurve med en Plan findes saaledes let ved Hjælp af Retningskegle og Oskulationshalv-

Digitized by Google

plan. Værd at fremhæve er ogsaa Beviset for Variationen af en Kurves Krumning ved Udfoldning af dens Tangentflade.

Undersøgelser af denne Art er jo aldrig helt lette at følge for de Studerende, men Tilegnelsen af dette Afsnit er dog væsentlig lettet derved, at alle de Begreber, som benyttes, er kendte og indøvede i 1. Afsnit.

Dette Stof er behandlet saa mange Gange tidligere, at man kunde tvivle om Muligheden af at give noget væsentligt nyt. Men denne Anmeldelse, som trods sin Længde ikke har medtaget alt, hvad der fortjener at nævnes, har forhaabentlig vist Læseren, at Professor Hjelmslev atter har formaaet at tage et kendt Stof op til fornyet Behandling fra Grunden, sammenfatte kendte Metoder i almindelige Principper, simplificere Fremstillingens Enkeltheder og endelig at naa til virkelig Nøjagtighed uden Anvendelse af de frygtelige ε-Stilladser, som skjuler Bygningen, idet han har vidst at vælge saadanne Udgangspunkter for Undersøgelsen, som er væsentlige, i Stedet for de noget tilfældige, man undertiden har valgt.

Med »Geometriske Eksperimenter«, »Elementær Geometri« og denne sidste Bog har Prof. Hjelmslev tilført den danske matematiske Literatur en Berigelse, som sikkert maa vise sig frugtbringende for Fremtiden, og som ingen Elsker af Geometri maa gaa forbi. T. B.

Danske Eksamensopgaver.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1918.

Deskriptiv Geometri.

Dobbelt retvinklet Projektion. Der er givet lodret og vandret Billede af et Punkt o og de lodrette Billeder af to Punkter a og b saaledes, at $o_L a_L = o_L b_L$. oa og ob er to paa hinanden vinkelrette Radier i en Cirkel C.

Bestem Cirklens Radius og Akserne i dens lodrette Billede samt lodret og vandret Spor for Cirklens Plan P, idet a og b skal ligge foran Frontplanen gennem o.

Cirklen C betragtes som Ledekurve for en Omdrejningscylinder, hvis Konturfrembringere i lodret Billede tegnes. En højregænget Skruelinie S paa denne Cylinder skal gaa gennem

Digitized by Google

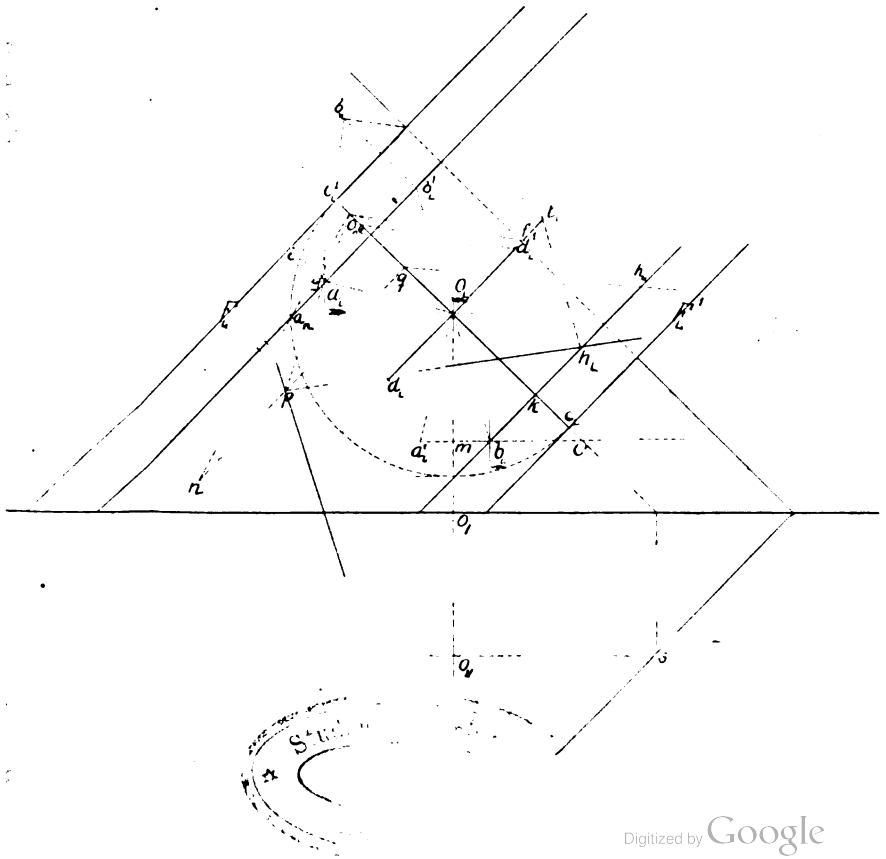
a, og lodret Billede af den fra a nedadgaaende Skruegang skal have et Dobbeltpunkt i a.

Find Skruehøjden, det Punkt, hvor S_L rører den øverste Konturfrembringer, og det Punkt af S, som ligger i $\frac{1}{4}$ Skruehøjde over $\boldsymbol{P}$, og bestem endelig Tangenten T til S i dette Punkt.

S tænkes projiceret ind paa $\boldsymbol{P}$ fra et Punkt t paa Cylindrens Akse i Afstanden $ot = \frac{1}{4}$ Skruehøjde over $\boldsymbol{P}$. Konstruer Projektionens Asymptote.

Løsning.

Da $\angle aob = 90^0$, $o_L a_L = o_L b_L$, og a og b ligger foran Frontplanen gennem o, er Ellipsens Storeakse $c_L c_L' \neq a_L b_L$, og Cirklens Radius er Hypotenusen i en ligebenet, retvinklet Trekant, hvis Katete er $o_L a_L$'s Projektion paa Aksen; Lilleaksen $d_L d_L'$ findes da let. Paa Figuren, som er taget fra en Eksamensbesvarelse, er Akserne fundet ved Chasles Konstruktion, idet $o_L a_L' \perp o_L a_L$. $\boldsymbol{P}$'s lodrette Spor er parallel med Storeaksen og bestemt ved Punktet f, som findes



Digitized by Google

ved Nedlægning af en Sestraaleplan til L gennem Lilleaksen ($o_L o_n = o_1 o_v$, $d_L e =$ Radius, $o_n f \neq d_L e$). — b_L^1 er b_L's diametralt modsatte Punkt. $a_L b_L^1$ er Billede af 2 Frembringere paa Cylindren og de paa disse liggende Punkter af S skal begge projiceres i a_L; da $\angle aob = 90^0$, bliver $a_L b_L^1$ Projektion af $\frac{1}{4}$ Skruehøjde; $b_n q$ (paa P's Profil) er sand Længde af denne. — i er Roringspunktet mellem S_L og Konturfrembringeren; a_L's diametralt modsatte Punkt h_L er Billede af det Punkt paa S, som ligger $\frac{1}{4}$ Skruehøjde over P, da $b_L h_L = a_L b_L^1$. Tangenten til S i h bestemmes ved sit Spor p, som findes ved Rektifikation af $\frac{1}{4}$ Cirkelperiferi og Affinitet. Idet $o_L t_L = b_L h_L$, er $th \neq P$; den søgte Asymptote, som er Projektionen af ph paa P fra t, tegnes da gennem p parallel med $t_L h_L$.

Opgaver til Løsning.

1. Bevis, at der til et vilkaarligt stort Tal K eksisterer et endeligt Antal Rektangler med Arealet 1, som alle ligger i samme Plan, har indbyrdes parallele Sider, og hvoraf to hvilkesomhelst rager ind over hinanden, saaledes at det Omraade, hvis Punkter tilhører mindst ét af Rektanglerne, har et Areal $> K$. H. Bohr.

Digitized by Google

Studenterforeningen

Om lineär fortsättning af analytiska funktioner.

Utdrag ur ett bref till Professor N. E. Nørlund.

Af G. Mittag-Leffler.

Redan år 1884, eller endast ett par år efter sedan *Weierstrass* i sitt grundläggande arbete »Zur Functionenlehre« (1880) utredt den dittills oförstådda eller endast oklart uppfattade väsentliga skillnaden mellan aritmetiskt eller analytiskt uttryck och analytisk funktion, hade jag i min afhandling i 4:de bandet af Acta Mathematica (Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes) visat, huru man på otaligt många olika sätt kan bilda analytiska uttryck, hvilka själfva gifna under enhetlig form, samtidigt framställa olika analytiska funktioner, hvilka i en eller flera punkter sammanhänga med hvarandra, utan att därföre något analytiskt samband emellan dem äger rum.

Härmed var emellertid vägen öppnad för den redan af Weierstrass i »Zur Functionenlehre« berörda frågan, huruvida det kunde finnas ett sådant samband mellan tvänne med hvarandra i någon punkt sammanhängande, olika analytiska funktioner, att den ena af funktionerna, oaktadt frånvaron af ett analytiskt samband, kunde betraktas som en nödvändig och entydigt gifven förtsättning af den andra.

Oaktadt allt hvad som talats och skrifvits, förelåg ingen lösning på denna fråga före år 1911. En sådan erhållas emellertid genom lämplig användning af en detta år offentliggjord sats af *Watson* (Phil. Transactions of the Royal Society, vol. 211) beträffande asymptotiska serier.

Ur mina undersökningar häröfver ber jag att få meddela Eder ett par resultat.

Teorem A.

»Koefficienterna k_μ i en konvergerande potensserie

$$\mathfrak{p}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} k_\mu x^\mu, \qquad (1)$$

hvilken framställer en af konvergenscirkeln begränsad, regulär analytisk funktion (= funktion, som icke kan analytiskt fort-

Digitized by Google

sättas utöfver konvergenscirkeln), kunna alltid väljas så: att den beständigt konvergerande serien

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} k_\mu \frac{x^\mu}{\alpha \cdot \mu}, \tag{2}$$

hvilken för $\alpha = 0$ sammanfaller med $\mathfrak{p}(x)$, då åter $\alpha \to 0$, framställer en lineär och kontinuerlig fortsättning utöfver konvergenscirkelns periferi af den genom potensserien definierade, genom dennes periferi begränsade analytiska funktionen, att denna fortsätning tillhör en ny analytisk funktion, samt vidare, att denna funktion uppfyller *Watsons* generaliserade villkor och härigenom är entydigt bestämd.«

Satsen kan likaväl uttalas så, att vi i stället för den genom potensserien $\mathfrak{p}(x)$ definierade funktonen $F(x)$ införa en funktion, definierad enbart genom konstanter k_μ, underkastade *Cauchys* villkor

$$\operatorname{Lim}_{\mu} \sqrt[\mu]{|k_\mu|} = \text{ändlig}. \tag{3}$$

Serien

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} k_\mu \frac{x^\mu}{\alpha \cdot \mu} \tag{4}$$

framställer i så fall, när $\alpha \to 0$, inom den mot konstanterna k_μ svarande fundamentalstjärnan en entydig gren af en analytisk funktion, hvilken icke längs någon vektor genom origo kan analytiskt fortsättas utöfver fundamentalstjärnans gräns. Konstanterna k_μ kunna emellertid väljas på sådant sätt, att en lineär kontinuerlig fortsättning utöfver gränsen äger rum, hvilken uppfyller *Watsons* villkor och härmed är entydigt gifven.

Watsons af mig generaliserade sats lyder:

Teorem B.

»Vi förutsätta rörande en funktion $F(z)$, att den är asymptotisk till serien

$$h_0 z^{\lambda_0} + h_1 z^{\lambda_1} + \cdots + h_\nu z^{\lambda_\nu} + \cdots; \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_\nu \cdots;$$
$$\operatorname{Lim} \lambda_\nu = \infty,$$

eller med andra ord, att

$$F(z) = h_0 z^{\lambda_0} + h_1 z^{\lambda_1} + \cdots + h_{\nu-1} z^{\lambda_{\nu-1}} + z^{\lambda_\nu} \cdot F_\nu(z);$$
$$\operatorname{Lim}_{z=0} F_\nu(z) = h_\nu$$

Digitized by Google

samt dessutom ytterligare, dels att funktionen $F_\nu(z)$; $\nu = 0, 1, 3 \cdots$ är analytisk och regulär inom en vinkel

$$-\alpha\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \alpha\frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq z < \rho,$$

och dels dessutom att

$$|F_\nu(z)| < K \cdot |\mu\lambda_\nu \quad ; \quad 0 < K < \infty; \quad 0 < \mu < \alpha.$$

Under dessa förutsättningar är funktionen $F(z)$ **entydigt** gifven.«

Satsen har af Watson bevisats för $\lambda_\nu = \nu$. Den torde kunna generaliseras mer, än jag här anfört, men jag har icke ännu ingående sysselsatt mig härmed. Satsen erhålles så godt som omedelbart ur de metoder, som *Phragmén-Lindelöf* begagnat i sin bekanta afhandling i Acta Math., Bd. 31.

Beviset för teorem A föres med användning af egenskaperna hos min funktion

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lceil\alpha \cdot \nu} \tag{5}$$

(Min note 5 till »Sur la représentation etc.« Acta Math, Bd. 29).

Jag har exempelvis infört en serie

$$\operatorname{Lim}_{\alpha=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\epsilon^{\nu k}} E_\alpha\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \quad ; \quad k > 1, \tag{6}$$

hvarvid jag antagit, dels att

$$a_\nu = e^{i\theta_\nu \cdot 2\pi} \neq 1; \quad \nu = 1, 2, 3 \cdots; \quad 0 < \theta_\nu < 1$$

är en på enhetscirkelns periferi oändligt tät punktmängd, samt dels att

$$|\theta_\nu| > \frac{1}{\nu}.$$

Serien framställer under dessa antagenden en regulär analytisk funktion inom och en annan utom enhetscirkeln. Det finnes intet analytiskt samband mellan de båda funktionerna, men de sammanhänga lineärt och kontinuerligt längs positiva reella axeln. Den ena funktionen en gång gifven, kan det icke finnas någon annan än den andra, hvilken uppfyller *Watsons* villkor, samt längs den reella axeln är lineärt förbunden med den andra.

Digitized by Google

Min generalisering af *Watsons* sats har gifvit mig anledning att äfven studera

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\nu}{|\alpha \cdot \lambda_\nu} e^{-\lambda_\nu t}, \tag{7}$$

där $\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ är en konvergerande *Dirichlets* serie.

Jag har särskilt valt att utgå från Riemanns $\zeta(z)$-funktion i stället för från $E_\alpha(z)$-funktionen. Välja vi exempelvis

$$\left.\begin{aligned} \theta_\nu &= \log \frac{1}{k_\nu} \quad (\nu > 0) \\ \theta_\nu &= -\log \frac{1}{k_{-\nu}} \quad (\nu < 0) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

samt förstå med k_ν alla egentliga bråk, ordnade i följden

$$k_2 = \tfrac{1}{2},\ k_3 = \tfrac{1}{3},\ k_4 = \tfrac{2}{3},\ k_5 = \tfrac{1}{4},\ k_6 = \tfrac{3}{4} \cdots,$$

erhåller jag:

Teorem C.

»Serien

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-e^{\nu k}} \zeta_\alpha(s + i2\pi\theta_\nu); \quad k > 1 \\ &\zeta_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha \log n} \cdot \frac{1}{n^s} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

är för $\alpha > 0$ beständigt konvergent. För $\alpha = 0$ öfvergår densamma i en serie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-e^{\nu k}} \zeta(s + i2\pi\theta_\nu); \quad \delta > 0, \tag{10}$$

hvilken på hvardera sidan om linien

$$R(s) = 1$$

framställer en af denna linie begränsad analytisk funktion.

Gränsuttrycket

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-e^{\nu k}} \zeta_\alpha(s + i2\pi\theta_\nu); \quad k > 1. \tag{11}$$

framställer åter dels dessa båda funktioner, dels äfven längs hvarje linie

Digitized by Google

$$-\infty < a \leq s \leq b < \infty \qquad (12)$$

ett lineärt och kontinuerligt samband emellan dem.

Denna lineära fortsättning af den ena funktionen in i den andra uppfyller *Watsons* generaliserade villkor, och den ena funktionen en gång entydigt gifven, är härmed den andra entydig bestämd. Det kan icke finnas någon annan analytisk funktion, hvilken längs en linie (12) lineärt sammanhänger med den första funktionen och samtidigt uppfyller *Watsons* generaliserade villkor.«

Alla mina bevis och utvecklingar höra helt och hållet hemma i den klassiska teorien för analytiska funktioner, så som den grundlagts och utvecklats af *Weierstrass*.

De Bernoulli'ske Polynomier.

Af N. E. Nørlund.

Denne lille Afhandling har til Hensigt at give en elementær Fremstilling af de Bernoulli'ske Polynomiers Teori. Den behandler saaledes et Spørgsmaal, som allerede for lang Tid siden er blevet grundig undersøgt fra mange forskellige Sider. Ikke desto mindre kan man afvinde Sagen adskillige nye Synspunkter. Man maa dog ikke vente i denne korte Note at finde egentlig nye Resultater, men jeg haaber, at man vil finde, at min Fremstillingsmaade er simplere og naturligere end den tidligere Forfattere har valgt. Disse Sider har forøvrigt til Formaal at tjene som Indledning til et efterfølgende Arbejde.

§ 1. Ved de Bernoulli'ske Tal forstaar man en Række af Tal $B_0, B_1, B_2, \cdots$, som er definerede ved Rekursionsformelen

$$B_0+\binom{\nu}{1}B_1+\binom{\nu}{2}B_2+\cdots+\binom{\nu}{\nu-1}B_{\nu-1}=0, \quad \nu=2, 3, 4, \cdots \qquad (1)$$

$$B_0 = 1.$$

Man ser umiddelbart, at disse Tal er rationale, og at $(\nu+1)!\,B_\nu$ er et helt Tal. De første af dem er

Digitized by Google

$$B_0=1,\quad B_1=-\tfrac{1}{2},\quad B_2=\tfrac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\tfrac{1}{30},\quad B_5=0,\quad B_6=\tfrac{1}{42}$$

De Bernoulli'ske Tal besidder interessante talteoretiske Egenskaber, og de spiller en vigtig Rolle ved flere Undersøgelser i Særdeleshed i Differensregningen. Dette viser sig allerede ved Behandlingen af følgende Problemer.

Lad os betragte Differensligningen

$$f(x+1)-f(x)=\nu x^{\nu-1},$$

hvor ν er et helt positivt Tal. Man kan finde et Polynomium $f(x)$, som tilfredsstiller denne Ligning. Dette Polynomium er af Graden ν, og det er bestemt paa en arbitrær Konstant nær.

Ved det Bernoulli'ske Polynomium*) af Graden ν forstaar man det Polynomium $B_\nu(x)$, som tilfredsstiller Differensligningen

$$B_\nu(x+1)-B_\nu(x)=\nu x^{\nu-1}, \tag{2}$$

og som for $x=0$ er lig med det Bernoulli'ske Tal B_ν

$$B_\nu(0)=B_\nu.$$

Lad os sætte

$$B_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}A_s x^{\nu-s}.$$

Substituerer man dette Udtryk i Ligningen (2), saa ser man, at Koefficienterne A_s skal tilfredsstille Rekursionsformelen

$$A_0=1,$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}A_s=A_\nu. \qquad (\nu\geq 2).$$

Men dette er netop den Formel, ved hvilken vi har defineret de Bernoulli'ske Tal; man har altsaa $A_s=B_s$ og følgelig

$$B_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}B_s x^{\nu-s}. \tag{3}$$

*) Der kan herske nogen Tvivl om, hvorledes man bedst skal definere de Bernoulli'ske Polynomier, og dette fremtræder paa en ulykkelig Maade i den meget omfattende Litteratur. Hvis man kun tænker paa en enkelt Side af Sagen, f. Eks. de talteoretiske Anvendelser, saa kan flere forskellige Definitioner forekomme ligeberettigede, men tager man Hensyn til samtlige Egenskaber hos disse Polynomier, saa kan der ikke være Tvivl om, at den ovennævnte Definition er at foretrække frem for alle andre.

Digitized by Google

Differentierer man med Hensyn til x, finder man

$$D_x B_\nu(x) = \nu \sum_{s=0}^{s=\nu-1} \binom{\nu-1}{s} B_s x^{\nu-1-s}.$$

Altsaa er

$$D_x B_\nu(x) = \nu B_{\nu-1}(x) \tag{4}$$

og følgelig

$$D_x^n B_\nu(x) = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1) B_{\nu-n}(x).$$

Af Taylor's Formel følger da, at man har

$$B_\nu(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s B_{\nu-s}(x). \tag{5}$$

Sætter man her specielt $h = 1$, saa finder man Rekursionsformelen

$$B_0(x) + \binom{\nu}{1} B_1(x) + \binom{\nu}{2} B_2(x) + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1} B_{\nu-1}(x) = \nu x^{\nu-1}, \tag{6}$$

som for $x = 0$ reducerer sig til (1). Ved Hjælp af denne Formel kan man successivt beregne alle de Bernoulli'ske Polynomier. Man finder for de første af dem

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \tfrac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x(x-1)(x-\tfrac{1}{2}),$$
$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \tfrac{1}{30},$$
$$B_5(x) = x(x-1)(x-\tfrac{1}{2})(x^2 - x - \tfrac{1}{3}).$$

§ 2. Man kan give disse Resultater en symbolsk Form, som i sig selv er interessant og som, navnlig ved de mere komplicerede Undersøgelser, som senere skal omtales, gør stor Nytte, fordi Teorien derigennem vinder meget i Klarhed og Overskuelighed.

Man kan skrive Rekursionsformelen (1) paa den symbolske Form

$$(B+1)^\nu - B^\nu = 0, \quad \nu = 0, 2, 3, 4, \cdots \tag{7}$$

Meningen med denne Formel er følgende. Man skal udvikle venstre Side efter Potenser af B og derefter erstatte B^n med det Bernoulli'ske Tal B_n, Relationen (7) er ikke længere gyldig, hvis $\nu = 1$, idet man for $\nu = 1$ har Identiteten

$$(B+1) - B = 1.$$

Digitized by Google

Heraf følger, at man har den symbolske Ligning

$$\varphi(B+1) - \varphi(B) = \varphi'(0), \tag{8}$$

hvor $\varphi(z)$ er et vilkaarligt Polynomium i z. Erstatter man $\varphi(z)$ med $\varphi(z+x)$ faar man

$$\varphi(x+B+1) - \varphi(x+B) = \varphi'(x). \tag{9}$$

Differensligningen

$$f(x+1) - f(x) = \varphi'(x), \tag{10}$$

hvor $\varphi(x)$ er et givet Polynomium, har altsaa Løsningen

$$f(x) = \varphi(x+B) = \varphi(x) + \frac{B_1}{1!}\varphi'(x) + \frac{B_2}{2!}\varphi''(x) + \frac{B_3}{3!}\varphi'''(x) + \cdots \tag{11}$$

Antager vi specielt, at $\varphi(x) = x^v$, saa følger det umiddelbart af de Bernoulli'ske Polynomiers Definition, at man har

$$B_v(x) = (x+B)^v. \tag{12}$$

Udvikler man højre Side, saa genfinder man Ligningen (3). Erstatter man x med $x+h$, saa faar man

$$B_v(x+h) = (x+B+h)^v, \tag{5 bis}$$

og hvis man her udvikler højre Side efter Potenser af h saa genfinder man Relationen (5).

(11) er forøvrigt kun et specielt Tilfælde af en almindeligere Formel. Erstatter man nemlig x med $x+h$, saa finder man $f(x+h) = \varphi(x+B+h) = \varphi(x+B(h))$, altsaa

$$f(x+h) = \varphi(x) + \frac{B_1(h)}{1!}\varphi'(x) + \frac{B_2(h)}{2!}\varphi''(x) + \frac{B_3(h)}{3!}\varphi'''(x) + \cdots \tag{13}$$

Man verificerer ogsaa let direkte, at dette Polynomium tilfredsstiller Differensligningen (10). Man behøver blot at anvende Differensoperationen paa den Variable h.

De talrige Anvendelser, som man i Differensregningen kan gøre af de Bernoulli'ske Polynomier, kan næsten altid føres tilbage til den vigtige Formel (13), som kun ved sin ydre Form adskiller sig fra den berømte Euler'ske Summationsformel.

Lad os endnu bemærke, at man kan opfatte (9) som en Rekursionsformel for de Bernoulli'ske Polynomier; (9) kan nemlig i Følge (12) skrives paa Formen

Digitized by Google

$$\varphi(B(x)+1)-\varphi(B(x))=\varphi'(x).$$

Udvikler man her efter Potenser af $B(x)$ og erstatter derefter $(B(x))^\nu$ med $B_\nu(x)$, saa kan man finde saa mange Rekursionsformler, som man vil, blot man vælger Polynomiet $\varphi(x)$ paa passende Maade. Sætter man f. Eks. $\varphi(x)=x^\nu$, saa faar man

$$(B(x)+1)^\nu-(B(x))^\nu=\nu x^{\nu-1},$$

hvilket er den ovenfor fundne Formel (6).

§ 3. Vi vender nu tilbage til Ligningen

$$f(x+1)-f(x)=(\nu+1)x^\nu.$$

Denne har følgende to Løsninger

$$B_{\nu+1}(x) \quad \text{og} \quad (-1)^{\nu+1}B_{\nu+1}(1-x).$$

Man ser det umiddelbart ved i Ligningen

$$B_{\nu+1}(x+1)-B_{\nu+1}(x)=(\nu+1)x^\nu$$

at erstatte x med $-x$. Differensen mellem de to ovennævnte Polynomer er derfor en Konstant K

$$(-1)^{\nu+1}B_{\nu+1}(1-x)=B_{\nu+1}(x)+K$$

Men denne Konstant er Nul. Thi differentierer man med Hensyn til x, faar man

$$B_\nu(1-x)=(-1)^\nu B_\nu(x). \tag{14}$$

Af Differentialrelationen (4) følger, at man har

$$\int_x^y B_\nu(z)\,dz=\frac{B_{\nu+1}(y)-B_{\nu+1}(x)}{\nu+1},$$

hvor x og y er vilkaarlige Tal. Heraf afleder man specielt

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz=x^\nu, \tag{15}$$

$$\int_x^{x+n} B_\nu(z)\,dz=x^\nu+(x+1)^\nu+(x+2)^\nu+\cdots+(x+n-1)^\nu.$$

Sætter man her $x=0$, faar man

Digitized by Google

$$\int_0^n B_\nu(z)\,dz = 1^\nu + 2^\nu + 3^\nu + \cdots (n-1)^\nu, \quad \nu > 0,$$

$$\int_0^1 B_\nu(z)\,dz = 0, \quad \nu > 0,$$

Opmærksomheden blev for første Gang henledt paa de Bernoulli'ske Polynomier ved den Omstændighed at de kan tjene til at summere disse Potenssummer.

Lad os dernæst betragte Funktionen

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right),$$

hvor n er et vilkaarligt helt positivt Tal. Man har i Følge (2)

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \nu x^{\nu-1}.$$

Men denne Ligning har ogsaa Løsningen $n^{1-\nu} B_\nu(nx)$. Følgelig er

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx) + K,$$

hvor K er en Konstant. For at bestemme den Konstant, vil vi integrere mellem Grænserne x og $x + \frac{1}{n}$. Man finder da

$$\int_x^{x+1} B_\nu(z)\,dz = n^{1-\nu} \int_x^{x+\frac{1}{n}} B_\nu(nz)\,dz + \frac{K}{n}.$$

Men i Følge (15) reducerer denne Ligning sig til $K = 0$. Man har altsaa

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} B_\nu\left(x + \frac{s}{n}\right) = n^{1-\nu} B_\nu(nx). \tag{16}$$

Vi vil nu benytte disse Resultater til at bestemme Værdien af $B_\nu(x)$ for visse Værdier af x. Sætter man i Ligningerne (2) og (14) $x = 0$, saa finder man

$$B_\nu(1) = B_\nu, \qquad \nu > 1$$
$$B_\nu(1) = (-1)^\nu B_\nu, \quad \nu > 0.$$

Digitized by Google

Studenterforeningen

Man har altsaa $B_\nu = 0$, hvis ν er ulige og større end 1. Følgelig er

$$B_{2\nu+1}(1) = B_{2\nu+1}(0) = 0, \qquad \nu > 0$$
$$B_{2\nu}(1) = B_{2\nu}(0) = B_{2\nu}. \tag{17}$$

Sætter man $x = 0$ i (16), saa finder man

$$\sum_{s=1}^{s=x-1} B_\nu \binom{s}{n} = (n^{1-\nu} - 1) B_\nu. \tag{18}$$

Hvis $n = 2$ reducerer denne Relation sig til

$$B_\nu(\tfrac{1}{2}) = (2^{1-\nu} - 1) B_\nu. \tag{19}$$

Hvis ν er ulige, er højre Side 0. Polynomiet $B_\nu(x)$ har altsaa de tre Nulpunkter $x = 0, 1, \frac{1}{2}$, hvis ν er ulige og $\geqq 3$.

Sætter man $n = 3$ i Ligningen (18), saa finder man ved Hjælp af (14), at

$$B_\nu(\tfrac{2}{3}) = B_\nu(\tfrac{1}{3}) = (3^{1-\nu} - 1) \frac{B_\nu}{2}, \tag{20}$$

hvis ν er lige.

Sætter man i (18) $n = 4$, saa finder man ved Hjælp af (14) og (19), at

$$B_\nu(\tfrac{3}{4}) = B_\nu(\tfrac{1}{4}) = 2^{-\nu}(2^{1-\nu} - 1) B_\nu, \tag{20 bis}$$

hvis ν er lige. Sætter man endelig $n = 6$, saa finder man ved Hjælp af (14), (19) og (20), at

$$B_\nu(\tfrac{5}{6}) = B_\nu(\tfrac{1}{6}) = (1 - 2^{1-\nu})(1 - 3^{1-\nu}) \frac{B_\nu}{2}, \tag{21}$$

hvis ν er lige.

§ 4. Ved flere Undersøgelser er det af Vigtighed at kende de Bernoulli'ske Polynomiers Fortegn i Intervallet fra 0 til 1, samt Beliggenheden af eventuelle Nulpunkter i dette Interval. Vi saa før, at de Polynomier, hvis Orden er ulige og større end 1, har Nulpunkter i Punkterne $x = 0$, $\frac{1}{2}$ og 1. Jeg vil vise, at disse Nulpunkter altid er af første Orden, og at der ikke findes andre i det nævnte Interval. Først skal det vises, at man har

$$(-1)^\nu B_{2\nu-1}(x) > 0, \text{ hvis } 0 < x < \tfrac{1}{2}. \tag{22}$$

Denne Ulighed bevises lettest ved Induktion. Den er rigtig for $\nu = 1$, thi $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Lad os antage, at den er rigtig for en vis Værdi af ν; integreres mellem Grænserne 0 og x, faas

Digitized by Google

$$(-1)^{\nu}(B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}) > 0, \quad \text{hvis } 0 < x < \tfrac{1}{2}. \tag{23}$$

Paa den anden Side har vi set, at

$$B_{2\nu+1}(0) = B_{2\nu+1}(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Der findes altsaa i det indre af Intervallet $0 < x < \frac{1}{2}$ et Punkt x_0, i hvilket Differentialkvotienten af $B_{2\nu+1}(x)$ og altsaa ogsaa $B_{2\nu}(x)$ forsvinder. Sætter vi i Uligheden (23) $x = x_0$, faas

$$(-1)^{\nu+1}B_{2\nu} > 0, \quad \nu > 0. \tag{24}$$

Vi kan nu vise, at man har

$$(-1)^{\nu+1}B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{hvis } 0 < x < \tfrac{1}{2}. \tag{25}$$

Thi Funktionen paa venstre Side bliver Nul i Punkterne 0 og $\frac{1}{2}$, men den kan ikke blive Nul i noget Punkt i det indre af Intervallet $0 < x < \frac{1}{2}$; thi i saa Fald vilde dens Differentialkvotient blive Nul i mindst to Punkter i det indre af Intervallet, og dens Differentialkvotient af anden Orden (eller $B_{2\nu-1}(x)$) vilde have mindst et Nulpunkt i det indre af Intervallet; men dette strider mod Uligheden (22). For at vise Rigtigheden af (25) er det nu tilstrækkeligt at bemærke, at for meget smaa positive Værdier af x har Funktionen paa venstre Side samme Fortegn som $(-1)^{\nu+1}B_{2\nu}$. Og dette Tal er i Følge (24) positivt.

Ved Hjælp af Relationen

$$B_{\nu}(1 - x) = (-1)^{\nu}B_{\nu}(x) \tag{26}$$

kan man nu gøre sig klart, hvorledes vore Polynomier forholder sig i Intervallet $\frac{1}{2} < x < 1$. Af (25) følger, at

$$(-1)^{\nu}B_{2\nu+1}(x) > 0, \quad \text{hvis } \tfrac{1}{2} < x < 1.$$

Videre ser man, at Uligheden (23) er gyldig i hele Intervallet $0 < x < 1$.

Polynomiet $B_{2\nu+1}(x)$ forsvinder altsaa i Punkterne 0, $\frac{1}{2}$ og 1, og det har ingen andre Nulpunkter i Intervallet $0 \leq x \leq 1$. De nævnte Nulpunkter er af første Orden, thi $B_{2\nu}(x)$ er forskellig fra Nul i disse Punkter, hvilket fremgaar af Uligheden (24) og Ligningerne (17) og (19).

Polynomiet $B_{2\nu}(x) - B_{2\nu}$ har ingen Nulpunkter i det indre af Intervallet $0 < x < 1$. Men Intervallets Endepunkter 0 og 1 er Nulpunkter af 2den Orden, hvis $\nu > 1$, fordi Differentialkvotienten bliver Nul i disse Punkter, medens Differentialkvo-

Digitized by Google

tienten af 2den Orden er forskellig fra Nul i Følge (24). Hvis $\nu = 1$ er disse to Nulpunkter af 1ste Orden.

Af det, som vi lige har sagt angaaende $B_{2\nu+1}(x)$, kan man endvidere slutte, at Polynomiet $B_{2\nu}(x)$ har et og kun et Nulpunkt i Intervallet $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Dette Nulpunkt maa være beliggende mellem $\frac{1}{8}$ og $\frac{1}{4}$, thi af Ligningerne (20bis) og (21) følger, at $B_{2\nu}(x)$ veksler Fortegn mellem disse to Punkter.

Naar $\nu \to \infty$ konvergerer dette Nulpunkt mod $\frac{1}{4}$.

Af (26) kan man endelig slutte, at $B_{2\nu}(x)$ har et og kun et Nulpunkt i Intervallet $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, og at dette Nulpunkt er beliggende mellem $\frac{3}{4}$ og $\frac{5}{6}$. Naar $\nu \to \infty$, konvergerer det mod $\frac{3}{4}$.

Danske Eksamensopgaver.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1918.

Matematik I.

1. Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 5xe^{2x} - 18e^{2x}$$

og bestem den partikulære Integralkurve $y = F(x)$, der gaar gennem Punktet (0,—19) og i dette Punkt berører Kurven

$$l.(1+x)\cdot\cos 4x - \operatorname{tg}(\sin 32x) + 3x^2 l.(25+y) + 37y + y^2 + 342 = 0.$$

Bevis sluttelig, at der i Intervallet $-\infty < x < \infty$ findes et og kun eet Punkt a, hvori det fundne partikulære Integral $y = F(x)$ har et Minimum, og angiv de to paa hinanden følgende hele Tal, imellem hvilke dette Minimumspunkt a er beliggende.

2. Find det ubestemte Integral

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{(5-x)(x-1)}}\,dx. \qquad (1 < x < 5).$$

og derefter det bestemte Integral

$$\int_1^5 \frac{x+1}{x\sqrt{(5-x)(x-1)}}\,dx.$$

Digitized by Google

Løsning.

1. Ligningen har det partikulære Integral

$$5xe^{2x} - 18e^{2x};$$

den homogene Lignings fuldstændige Integral er

$$e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Det fuldstændige Integral er altsaa

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 5xe^{2x} - 18e^{2x}.$$

Indsættelse af (0,—19) giver

$$c_1 = -1, \quad c_2 = y' + 33.$$

Af Ligningen for den givne Kurve findes for $x = 0$, $y = -19$, $y' = -31$, altsaa $c_2 = 2$.

Det søgte Integral er altsaa

$$y = e^{2x}(-\cos x + 2 \sin x + 5x - 18).$$

Heraf $$\frac{dy}{dx} = e^{2x}(5 \sin x + 10x - 31).$$

Ligningen $u = 5 \sin x + 10x - 31 = 0$ har en Rod a mellem 3 og 4, og u er en stedse voksende Funktion, thi for alle x er

$$u' = 5 \cos x + 10 > 0.$$

Altsaa er a det eneste Minimumspunkt.

2. Skærer vi i Keglesnittet (Cirklen)

$$y = \sqrt{(5 - x)(x - 1)}$$

med Linjen $y = \alpha(x - 1)$, finder vi Parameterfremstillingen

$$x = \frac{5 + \alpha^2}{1 + \alpha^2}, \quad y = \frac{4\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad dx = -\frac{8\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} d\alpha,$$

altsaa

$$\alpha = \frac{\sqrt{(5 - x)(x - 1)}}{x - 1}$$

$$\int \frac{x + 1}{x\sqrt{(5 - x)(x - 1)}} dx = -4 \int \frac{\alpha^2 + 3}{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 5)} d\alpha.$$

Man finder ved Dekomposition

$$\frac{\alpha^2 + 3}{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 5)} = \frac{\frac{1}{2}}{\alpha^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{\alpha^2 + 5},$$

altsaa

$$-4 \int \frac{\alpha^2 + 3}{(\alpha^2 + 1)(\alpha^2 + 5)} d\alpha = -2\left(\operatorname{Arc\,tg} \alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\right).$$

Digitized by Google

Heraf

$$\int_1^5 \frac{x+1}{x\sqrt{(5-x)(x-1)}}\,dx = \pi\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5}.$$

Matematik II.

1. I et retvinklet Koordinatsystem er givet en Cylinderflade, hvis Normalsnit er den i XY-Planen liggende Kurve

$$x = \sqrt{2}(t - \sin t)$$
$$y = 1 - \cos t,$$

hvor Parameteren t gennemløber Intervallet $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Denne Cylinderflade overskæres med Planen $z = y + 2$. Henad Skæringskurven afsættes fra den til $t = 0$ svarende Frembringer Buelængden $\lambda = 2\sqrt{2}$ i den Retning, der svarer til, at t voksende gennemløber sit Interval. Bestem Tangenten til Skæringskurven i den omtalte Bues Endepunkt samt Skæringskurvens Krumning i Punktet.

2. Find Volumen af enhver af de to Dele, hvori det af Fladen

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2x - 6y + 12 = 0$$

begrænsede Legeme deles af en Plan vinkelret paa Midten af den korteste Afstand fra Fladens Centrum ud til Overfladen.

Løsninger:

1. Skæringskurvens Ligninger:

$$x = \sqrt{2}\,(t - \sin t),$$
$$y = 1 - \cos t,$$
$$z = 3 - \cos t,$$

hvoraf

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}\,(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = \sin t, \quad \frac{dz}{dt} = \sin t,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2}\,\sqrt{(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + \sin^2 t} = \sqrt{4 - 4\cos t} = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2},$$

$$\lambda = \int_0^t 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\Big]_0^t = 4\sqrt{2}\left(1 - \cos\frac{t}{2}\right) = 2\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{t}{2} = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2\pi}{3}.$$

I Punktet $t = \frac{2\pi}{3}$ er

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Tangenten:

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})}{3\sqrt{2}} = \frac{y - \frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{z - \frac{7}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Koordinattransformationen

$$x = x_1, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - z_1) - 2, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 + z_1)$$

giver

$$x_1 = \sqrt{2}(t - \sin t)$$

$$y_1 = \frac{y + z + 2}{\sqrt{2}} = \frac{6 - 2\cos t}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(3 - \cos t)$$

$$z_1 = \frac{z - y - 2}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$x_1' = \sqrt{2}(1 - \cos t), \qquad y_1' = \sqrt{2}\sin t,$$

$$x_1'' = \sqrt{2}\sin t, \qquad y_1'' = \sqrt{2}\cos t,$$

$$\Delta = x_1'y_1'' - x_1''y_1' = 2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = 2(\cos t - 1).$$

$$x_1'^2 + y_1'^2 = 2(2 - 2\cos t) = 4(1 - \cos t)$$

$$K = \frac{|\Delta|}{(x_1'^2 + y_1'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(1 - \cos t)}{8(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{1 - \cos t}} = \frac{1}{4\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

2. Ved Parallelforskydning (a, b, c) bestemt ved

$$\begin{aligned} 2a - b + 1 &= 0 \\ -a + b - 3 &= 0 \\ c &= 0, \end{aligned}$$

d. v. s. til Punktet $(2, 5, 0)$ reduceres Ligningen til

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 = 0.$$

Ved Reduktionen af den kvadratiske Form bestemmes de nye Koefficienter af Ligningen

$$\begin{vmatrix} 2 - s & -1 & 0 \\ -1 & 1 - s & 0 \\ 0 & 0 & 1 - s \end{vmatrix} = (2 - s)(1 - s)^2 - (1 - s) = 0,$$

der giver $s = 1$, $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Digitized by Google

Den reducerede Form er altsaa

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y^2+z^2$$

og Fladens Ligning

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}+\frac{z^2}{1}=1.$$

Den søgte Plan er nu $x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Et Snit vinkelret paa X-Aksen har Arealet

$$\pi\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\right).$$

$$V_1=\pi\frac{\sqrt{5}+1}{2}\int_{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}\right)dx=\frac{5\pi}{24}.$$

Det andet Volumen V_2 er $\frac{9}{8}\pi$.

Rationel Mekanik.

1. En Kran er dannet af fem vægtløse Stænger, der alle ligger i samme lodrette Plan og danner Siderne i to Trekanter 123 og 243, der begge er ligebenede og retvinklede henholdsvis ved 2 og ved 4. Stangen 12 er vandret og har Længden a. I Punktet 4 er ophængt en Vægt paa 10 kg. Kranen er understøttet i Punkterne 1 og 2, saaledes at Reaktionerne R_1 og R_2 i disse Punkter begge er lodrette og gaar i de paa Figuren viste Retninger. Find Spændingerne i alle Stængerne, Reaktionerne R_1 og R_2 samt den lodrette Nedbøjning af Punktet 4, naar det antages, at alle Stængerne har samme Tværsnit q og samme Elasticitetskoefficient E.

2. En homogen fuldstændig bøjelig Kæde, hvis Længde er a, og som vejer p kg pr. Længdeenhed, ligger i ret Linie paa en ru vandret Bordplade, vinkelret paa Bordets Kant, idet dog en Del af Kæden gaar over en lille gnidningsfri Trisse (hvis Masse kan udelades). Gnidningskoefficienten mellem Bordet og Kæden er $\frac{1}{3}$, og naar i det første Øjeblik Halvdelen af Kæden hænger frit ned, skal man bestemme Bevægelsen og finde den Tid, der medgaar til, at hele Kæden er løbet af Bordet.

Digitized by Google

Vis dernæst, at Spændingen af Kæden i et Punkt, hvis Afstand fra det nederste Punkt er z, og i et Øjeblik, hvor det frit nedhængende Kædestykke har Længden x, vil være $\frac{4p}{3a}(a-x)z$.

Løsning.

1. Momentsætningen giver, idet Understøtningspunkterne benyttes som Momentcentrer Reaktionerne 5 kg og 15 kg. Det er let at konstruere Spændingsdiagrammet, og dette giver Spændingerne S i Stængerne 12, 23, 13, 34, 24 henholdsvis: -5, -10, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$.

Med Benyttelse af Formlen

$$\delta = \Sigma \frac{SS_1 l}{Eq},$$

hvor $S_1 = \frac{1}{10} S$ og l er Stanglængden, finder man

$$\delta = \frac{5a(3\frac{1}{2} + 2\sqrt{2})}{Eq}.$$

2. Bevægelsesligningen bliver

$$\frac{p}{g} a \frac{d^2x}{dt^2} = xp - (a-x)\tfrac{1}{3}p$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{4g}{3a}x = -\frac{g}{3},$$

hvorved

$$x = Ae^{t\sqrt{\frac{4g}{3a}}} + Be^{-t\sqrt{\frac{4g}{3a}}} + \frac{a}{4}.$$

Da $x = \frac{a}{2}$, $x' = 0$ for $t = 0$, faar man

$$A = B = \frac{a}{8}.$$

Den søgte Spænding bestemmes ved

$$\frac{p}{g} dz \cdot x'' = p\,dz - dT,$$

$$\frac{dT}{dz} = p - \frac{p}{g}x'' = \frac{4p}{3} - \frac{4p}{3a}x,$$

hvoraf

da

$$T = \frac{4p}{3a}(a-x)z,$$

$$T = 0 \quad \text{for } z = a.$$

Matematik for Fabrikingeniører.

1. I Intervallet $0 < x < \pi$ er Funktionen $f(x$ givet ved

Digitized by Google

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{naar } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{naar } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Denne Funktion skal udvikles i en Sinusrække.

Angiv særlig Rækkens Sum for $x = 0$, for $x = \frac{\pi}{2}$ og for $x = \pi$.

2. Tegn Kurven $y^2 - 2xy - x^3 = 0$;

find dernæst det lukkede Areal, der begrænses af Kurven.

Løsninger.

1. Funktionen defineres i Intervallet $-\pi < x < 0$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{naar } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ -e^{-x}, & \text{naar } -\frac{\pi}{2} < x < 0. \end{cases}$$

Derefter er

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx dx = 2\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin nx dx.$$

Ved Udregning findes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin nx dx = \frac{n}{n^2+1}\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1} =$$

$$\begin{cases} (n = 4p) \dfrac{4p}{(4p)^2+1}\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ (n = 4p+1) \dfrac{4p+1+e^{\frac{\pi}{2}}}{(4p+1)^2+1} \\ (n = 4p+2) \dfrac{4p+2}{(4p+2)^2+1}\left(1 + e^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ (n = 4p+3) \dfrac{4p+3-e^{\frac{\pi}{2}}}{(4p+3)^2+1}. \end{cases}$$

Altsaa

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{1^2+1}\sin x + \frac{2\left(1+e^{\frac{\pi}{2}}\right)}{2^2+1}\sin 2x + \frac{3-e^{\frac{\pi}{2}}}{3^2+1}\sin 3x + \frac{4\left(1-e^{\frac{\pi}{2}}\right)}{4^2+1}\sin 4x + \cdots\right\}.$$

Digitized by Google

For $x = 0$ er Summen $\frac{1}{2}(-1) = 0$, ligeledes for $x = \pi$ (ses ogsaa af Rækken); for $x = \frac{\pi}{2}$ er Summen $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 0}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$.

2. Tangenterne i Begyndelsespunktet er $y = \begin{cases} 0 \\ 2x \end{cases}$; i polære Koordinater $r = \frac{\operatorname{tg} v}{\cos v}(\operatorname{tg} v - 2)$.

$$y = x \pm \sqrt{x^2 + x^3} = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = -2\sqrt{x^2 + x^3}.$$

$$+\int_{-1}^{0} 2\sqrt{x^2 + x^3}\,dx = -2\int_{-1}^{0} x\sqrt{1 + x}\,dx;$$

$$\sqrt{1 + x} = z, \quad x = z^2 - 1, \quad dx = 2dz \cdot z$$

giver

$$-2\int_{-1}^{0} x\sqrt{1 + x}\,dx = -4\int_{0}^{1} (z^4 - z^2)\,dz = -4\left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{8}{15}.$$

Tyngdep. (ξ, η). $\frac{y_1 + y_2}{2} = x$.

$$\tfrac{8}{15}\xi = \int_{-1}^{0} -2x\sqrt{1 + x} \cdot x\,dx = -4\int_{0}^{1} (z^2 - 1)^2 \cdot z^2\,dz = -4\int_{0}^{1} (z^6 - 2z^4 + z^2)\,dz$$

$$= -4\left(\tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3}\right) = \frac{-4}{105}(15 - 42 + 35) = \frac{-32}{105}.$$

$$\xi = -\tfrac{4}{7} = -\eta.$$

Opgave til Løsning.

2. Man skal bestemme den mest almindelige Funktionaloperation Ω, som tilfredsstiller Operationsligningen

$$\Omega(f + \varphi) + \Omega(f - \varphi) = 2\Omega(f) + 2\Omega(\varphi),$$

hvor f og φ er givne vilkaarlige Funktioner. Til Vejledning tjener, at Operationsligningen tilfredsstilles af enhver Operation Ω_1, som er defineret ved $\Omega_1(f) = D'(f)\,D''(f)$, hvor D' og D'' betegner vilkaarlige distributive Operationer.

J. L. W. V. Jensen.

Digitized by Google

De Euler'ske Polynomier.

Af N. E. Nørlund.

(Fortsættelse af Afhandlingen »De Bernoulliske Polynomier« S. 33.)

§ 5. Der er visse andre Polynomier, som er nær beslægtede med de Bernoulli'ske Polynomier, og som det er naturligt at omtale i Sammenhæng med disse. Lad os betragte Differensligningen

$$\frac{f(x+1)+f(x)}{2} = x^{\nu}, \tag{1}$$

hvor ν er et helt, positivt Tal. Det er aabenbart, at der er eet og kun eet Polynomium, som tilfredsstiller denne Ligning. Dette Polynomium er af Ordenen ν. Det er det saakaldte Eulerske Polynomium. Vi betegner det med $E_{\nu}(x)$. Man har altsaa

$$\frac{E_{\nu}(x+1)+E_{\nu}(x)}{2} = x^{\nu}. \tag{2}$$

Differentierer man denne Relation med Hensyn til x, saa ser man, at

$$D_x E_{\nu}(x) = \nu E_{\nu-1}(x). \tag{3}$$

Af Taylors Formel følger da, at man har

$$E_{\nu}(x+h) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{\nu}{s} h^s E_{\nu-s}(x). \tag{4}$$

Sætter man her specielt $h = 1$, saa reducerer denne Ligning sig til Recursionsformelen

$$2E_{\nu}(x) + \binom{\nu}{1} E_{\nu-1}(x) + \binom{\nu}{2} E_{\nu-2}(x) + \cdots + E_0(x) = 2x^{\nu}, \tag{5}$$

ved Hjælp af hvilken man successivt kan beregne alle Polynomierne $E_{\nu}(x)$. Man finder saaledes

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x - \tfrac{1}{2}, \quad E_2(x) = x(x-1),$$
$$E_3(x) = (x - \tfrac{1}{2})(x^2 - x - \tfrac{1}{2}),$$
$$E_4(x) = x(x-1)(x^2 - x - 1),$$
$$E_5(x) = (x - \tfrac{1}{2})(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1),$$
$$E_6(x) = x(x-1)(x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 3).$$

Digitized by Google

Hvis man i (2) erstatter x med $-x$, saa ser man, at Polynomiet

$$(-1)^{\nu} E_{\nu}(1-x)$$

ogsaa er en Løsning af Ligningen (1). Dette Polynomium er altsaa identisk med $E_{\nu}(x)$, thi der er kun eet Polynomium, som tilfredsstiller denne Ligning. Man har altsaa

$$E_{\nu}(1-x) = (-1)^{\nu} E_{\nu}(x). \tag{6}$$

Lad n være et helt, positivt, ulige Tal. Lad os betragte Funktionen

$$f(x) = n^{\nu} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s} E_{\nu}\left(\frac{x+s}{n}\right).$$

Man har aabenbart

$$f(x+1) + f(x) = n^{\nu}\left(E_{\nu}\left(\frac{x}{n}\right) + E_{\nu}\left(\frac{x}{n}+1\right)\right) = 2x^{\nu}.$$

Polynomiet $f(x)$ er altsaa en Løsning af Ligningen (1) og følgelig identisk med $E_{\nu}(x)$. Man har derfor Relationen

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s} E_{\nu}\left(\frac{x+s}{n}\right) = n^{-\nu} E_{\nu}(x).$$

eller, naar man i Stedet for x skriver nx

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s} E_{\nu}\left(x+\frac{s}{n}\right) = n^{-\nu} E_{\nu}(nx). \tag{7}$$

Paa samme Maade viser man de to følgende Relationer

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{s} B_{\nu}\left(x+\frac{s}{n}\right) = -\frac{\nu}{2n^{\nu-1}} E_{\nu-1}(nx), \tag{8}$$

hvor n er et helt, positivt, lige Tal.

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} E_{\nu}\left(x+\frac{2s}{n}\right) = \frac{2^{\nu}}{n^{\nu-1}} \int_{x}^{x+1} B_{\nu}\left(\frac{nz}{2}\right) dz,$$

hvor n er et vilkaarligt, helt positivt Tal.

§ 6. Euler har indført visse Tal E_{ν}, som man kalder de Euler'ske Tal, og som optræder som Koefficienter i Potens-

Digitized by Google

rækkeudvikling for sec x. Man kan definere Tallene E_ν ved Rekursionsformelen

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}E_{\nu-s}+\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}E_{\nu-s}=0,\ \nu=1,2,3,\cdots \quad (9)$$

$$E_0=1.$$

Denne Relation kan ogsaa skrives under Formen

$$E_\nu+\binom{\nu}{2}E_{\nu-2}+\binom{\nu}{4}E_{\nu-4}+\cdots=0,\ \nu=1,2,3,\cdots$$

Det sidste Led paa venstre Side er E_0, hvis ν er lige, men νE_1, hvis ν er ulige. Man ser umiddelbart, at de Euler'ske Tal er hele Tal og at $E_\nu=0$, hvis ν er ulige. De første af dem er

$$E_0=1,\ E_2=-1,\ E_4=5,\ E_6=-61,\ E_8=1385,$$
$$E_{10}=-50521.$$

Polynomierne $E_\nu(x)$ kan paa en smuk Maade udtrykkes ved Hjælp af de Euler'ske Tal. Lad os sætte

$$E_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}A_s(x-\tfrac{1}{2})^{\nu-s}.$$

For at bestemme Koefficienterne A_s substituerer vi dette Udtryk i Ligningen (2) og udvikler venstre Side efter Potenser af x. Identificerer man Koefficienterne til lige store Potenser af x, saa ser man, at Tallene A_s skal tilfredsstille Rekursionsformelen

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}2^{\nu-s}A_{\nu-s}+\sum_{s=0}^{s=\nu}(-1)^s\binom{\nu}{s}2^{\nu-s}A_{\nu-s}=0,\ \nu=1,2,3,\cdots$$

$$A_0=1,$$

som paa eentydig Maade bestemmer disse Tal. Men sammenligner man med (9) saa ser man, at

$$E_\nu=2^\nu A_\nu$$

følgelig er

$$E_\nu(x)=\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}\frac{E_s}{2^s}(x-\tfrac{1}{2})^{\nu-s}. \quad (10)$$

Sætter man her $x=\frac{1}{2}$ finder man

Digitized by Google

$$E_\nu\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{E_\nu}{2^\nu}. \qquad (11$$

Polynomiet $E_\nu(x)$ bliver altsaa Nul i Punkt $x = \frac{1}{2}$, hvis ν er ulige.

§ 7. For bedre at overse, hvorfor just Rekursionsformelen (9) spiller en Rolle for vor Differensligning, kan det være praktisk at skrive den paa den symbolske Form

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = \begin{cases} 0, & \nu > 0, \\ 2, & \nu = 0. \end{cases} \qquad (12$$

Man skal her udvikle efter Potenser af E og derefter erstatte E^n med E_n. Man har følgelig

$$\varphi(E+1) + \varphi(E-1) = 2\varphi(0),$$

hvor $\varphi(z)$ er et vilkaarligt Polynomium. Og hvis man erstatter $\varphi(z)$ med $\varphi\left(x + \frac{z}{2}\right)$, finder man

$$\varphi\left(x + \frac{E+1}{2}\right) + \varphi\left(x + \frac{E-1}{2}\right) = 2\varphi(x). \qquad (13$$

Differensligningen

$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f(x) = \varphi(x), \qquad (14$$

hvor $\varphi(x)$ er et vilkaarligt Polynomium af Ordenen ν, har altsaa Losningen

$$f(x) = \varphi\left(x + \frac{E-1}{2}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu} \varphi^{(s)}\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \frac{1}{2^s} \frac{E_s}{s!}. \qquad (15$$

Hvis man specielt sætter $\varphi(x) = x^\nu$, saa følger af de Euler'ske Polynomiers Definition, at

$$E_\nu(x) = \left(x + \frac{E-1}{2}\right)^\nu,$$

hvilket er en symbolsk Form for Ligningen (10). Erstatter man x med $x + h$, saa finder man

$$E_\nu(x+h) = \left(x + \frac{E-1}{2} + h\right)^\nu = (E(x+h)^\nu.$$

Udvikler man her efter Potenser af h, saa genfinder man Ligningen (4). (15) er forøvrigt kun et specielt Tilfælde af en almindeligere Udvikling. Det Polynomium $f(x)$, som er defi-

Digitized by Google

neret ved Ligningen (14) kan nemlig udvikles paa følgende Maade

$$f(x+h) = \varphi(x + E(h)) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s(h)}{s!},$$

hvor x og h er vilkaarlige Variable. Man verificerer det umiddelbart, thi hvis han erstatter h med $h+1$ og adderer, saa finder man

$$\frac{f(x+h+1) + f(x+h)}{2} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varphi^{(s)}(x) \frac{h^s}{s!} = \varphi(x+h).$$

Man kan betragte Ligningen (13) som en Rekursionsformel for Polynomierne $E_\nu(x)$. Denne Ligning kan nemlig skrives paa Formen

$$\varphi(E(x)+1) + \varphi(E(x)) = 2\varphi(x).$$

Vælger man Polynomiet $\varphi(x)$ paa passende Maade, saa kan man finde saa mange Rekursionsformler som man vil. Sætter man for Exempel $\varphi(x) = x^\nu$, saa genfinder man Ligningen (5) som kan skrives paa den symbolske Form

$$(E(x)+1)^\nu + (E(x))^\nu = 2x^\nu.$$

Sætter man her specielt $x = \frac{1}{2}$, saa finder man

$$(E+2)^\nu + E^\nu = 2,$$

det vil sige, at

$$E_\nu + \sum_{s=0}^{s=\nu-1} \binom{\nu}{s} 2^s E_{\nu-s} = 2.$$

§ 8. Ved Hjælp af Relationerne (7) og (8) kan man bestemme Værdien af Polynomiet $E_\nu(x)$ for forskellige rationale Værdier af x. Sætter man i (8) $x = 0$ og $n = 2$, saa finder man

$$E_{\nu-1}(0) = 2(1-2^\nu)\frac{B_\nu}{\nu} \qquad (18)$$

Sætter man $x = 0$ i Ligningen (2), saa afleder man heraf

$$E_{\nu-1}(1) = 2(2^\nu - 1)\frac{B_\nu}{\nu}, \qquad \nu > 1. \qquad (19)$$

Polynomierne $E_\nu(x)$ har altsaa Nulpunkter i $x = 0$ og $x = 1$, hvis ν er lige; disse Nulpunkter er af 1ste Orden, thi Differen-

Digitized by Google

tialkvotienten af $E_\nu(x)$ er forskellig fra Nul i disse Punkter i Følge Uligheden (24) § 4. Sætter man $x = 0$ og $n = 3$ i Ligningen (7), saa finder man naar man gør Brug af (6)

$$E_\nu\left(\tfrac{1}{3}\right) = (1 - 3^{-\nu})(1 - 2^{\nu+1})\frac{B_{\nu+1}}{\nu+1}, \tag{20}$$

saafremt ν er ulige.

Sætter man $x = \frac{1}{2}$ og $n = 3$ i Ligningen (7), saa finder man

$$E_\nu\left(\tfrac{5}{6}\right) = E_\nu\left(\tfrac{1}{6}\right) = (1 + 3^{-\nu})\,2^{-\nu-1}E_\nu, \tag{21}$$

saafremt ν er lige.

Sætter man endelig $x = \frac{1}{4}$, $n = 2$ i Ligningen (8), saa finder man

$$B_\nu\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\nu\frac{E_{\nu-1}}{2^{2\nu}},$$

saafremt ν er ulige. Sammenligner man denne Formel med (20) § 3, saa ser man, at man for alle ν har

$$B_\nu\left(\tfrac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2^{\nu-1}} - 1\right)\frac{B_\nu}{2^\nu} - \nu\frac{E_{\nu-1}}{4^\nu}. \tag{22}$$

De Euler'ske Polynomier kan udtrykkes ved Hjælp af de Bernoulli'ske Polynomier. Af (18) følger nemlig, at

$$E_\nu(x) = \frac{2}{\nu+1}\sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu+1}{s}(1 - 2^s)B_s x^{\nu+1-s} \tag{23}$$

Man har altsaa

$$E_\nu(x) = \frac{2}{\nu+1}\left[B_{\nu+1}(x) - 2^{\nu+1}B_{\nu+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{24}$$

Af (8) følger for $n = 2$ følgende andet Udtryk

$$E_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}}{\nu+1}\left[B_{\nu+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_{\nu+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{25}$$

Tallene B_ν kan ogsaa udtrykkes ved Tallene E_ν og omvendt. Sætter man $x = 1$ i Ligningen (10) saa finder man

$$2^{\nu+1}(2^{\nu+1} - 1)\frac{B_{\nu+1}}{\nu+1} = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}E_s.$$

Paa den anden Side sætter man $x = \frac{1}{2}$ i (23) saa finder man

$$E_\nu = \sum_{s=0}^{s=\nu}\binom{\nu}{s}(1 - 2^{s+1})2^{s+1}\frac{B_{s+1}}{s+1}.$$

Digitized by Google

Den ene af disse Rekursionsformler er den reciproke til den anden. Man finder f. Ex. den sidste ved at løse den første med Hensyn til Tallene E_ν.

Vi har set, at man har

$$\int_x^y B_\nu(z)\,dz = \frac{B_{\nu+1}(y) - B_{\nu+1}(x)}{\nu+1}.$$

Sætter man her $y = x + \frac{1}{2}$, saa følger af (25), at

$$\int_x^{x+\frac{1}{2}} B_\nu(z)\,dz = \frac{E_\nu(2x)}{2^{\nu+1}}.$$

Man har altsaa specielt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} B_\nu(z)\,dz = 2\,(2^{-\nu-1} - 1)\,\frac{B_{\nu+1}}{\nu+1}$$

og

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} B_\nu(z)\,dz = \frac{E_\nu}{2^{2\nu+1}}.$$

Til Slut skal vi endnu bemærke, at man ved at ræsonnere paa lignende Maade som ovenfor kan vise at

$$(-1)^\nu E_{2\nu}(x) > 0, \text{ hvis } 0 < x < 1 \qquad (26)$$

og at

$$(-1)^\nu E_{2\nu-1}(x) > 0, \text{ hvis } 0 \leq x < \tfrac{1}{2}.$$

De Euler'ske Polynomier af lige Grad har derfor simple Nulpunkter i $x = 0$ og $x = 1$ og Polynomierne af ulige Grad har et simpelt Nulpunkt $x = \frac{1}{2}$, men der findes ingen andre Nulpunkter i Intervallet $0 < x \leq 1$.

Af Uligheden (26) følger for $x = \frac{1}{2}$ at

$$(-1)^\nu E_{2\nu} > 0.$$

Tallene $E_{2\nu}$ kan derfor ikke blive Nul for nogen Værdi af ν.

Digitized by Google

Danske Eksamensopgaver.

Skoleembedseksamen ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet.

Juni 1919.

I. Del (ældre Ordning).

I.

Elementær Matematik.

1. Der ønskes en Fremstilling af Sætningerne om den ligebenede Trekant, i den plane og i den sfæriske Geometri.

2. I en plan Trekant er Halveringslinien for en af Vinklerne tillige Median til den modstaaende Side. Vis, at Trekanten er ligebenet.

3. Undersøg, om en lignende Sætning gælder for sfæriske Trekanter.

Løsning:

2. I $\triangle ABC$ er AD baade Halveringslinie og Median. Vi sammenligner de to Trekanter ADB og ADC. De har Siden AD fælles og desuden er $\angle ADB = ADC$, $DB = DC$. Trekanterne har altsaa en Vinkel, en hosliggende og den modstaaende Side lige store. Heraf følger, at de to Vinkler ABD og ACD enten er lige store eller Supplementvinkler. Det sidste er umuligt, da de to Vinkler indgaar i samme Trekant. Altsaa er $\angle ABD = ACD$ d. v. s. Trekanten ABC er ligebenet.

3. En ganske tilsvarende Betragtning paa Kuglen fører til det Resultat, at de to Sider AB og AC i $\triangle ABC$ enten maa være lige store eller have Summen 180^0.

II.

1. Find det fuldstændige Integral af den lineære, ikke homogene Differentialligning af anden Orden

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 + x^3e^x.$$

2. Bevis Formlen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

3. Af Begyndelsesværdierne $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ dannes en Følge af hele Polynomier ved Formlen

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x);$$

Digitized by Google

bevis, at almindelig

$$f_n(x) = x^n - \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \binom{n-2}{2} x^{n-4} - \binom{n-3}{3} x^{n-6} + \cdots,$$

og at samtlige algebraiske Ligninger $f_n(x) = 0$, for $n > 0$, har lutter reelle Rødder.

Løsninger:

1. Sættes som sædvanlig $y = x^r$, bliver den determinerende Ligning $r^2 - 4r + 4 = 0$, altsaa findes Dobbeltroden $r = 2$, og den homogene Ligning har de partikulære Integraler x^2 og $x^2 \log x$. Sættes dernæst som sædvanlig

$$y = x^2 \int z\,dx,$$

bestemmes z ved $xz' + z = \frac{1}{x} + e^x$, og Substitutionen $z = uv$ giver

$$u = \frac{1}{x}, \quad v' = \frac{1}{x} + e^x, \quad v = \log x + e^x + C, \quad z = \frac{\log x}{x} + \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x},$$

og det fuldstændige Integral bliver derfor

$$y = C_1 x^2 + C x^2 \log x + \frac{x^2}{2} \log^2 x + x^2 \int \frac{e^x dx}{x}.$$

2. Ved Dekomposition findes

$$\frac{1}{x^2(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4(x+2)},$$

$$\frac{1}{2x(x+1)^2(x+2)} = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{4(x+2)};$$

sættes dernæst i Udtrykket

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right).$$

$x = 1, 2, 3, 4, \cdots$, og adderes, faas Rækkesummen $\frac{1}{4}$.

3. Under Anvendelse af den velkendte Formel

$$\binom{m}{p} + \binom{m}{p-1} = \binom{m+1}{p}$$

bevises det almindelige Udtryk for $f_n(x)$ let ved Induktion.

Af Definitionen for $f_n(x)$ følger det umiddelbart af Niels Nielsens Algebra § 24, at Ligningen $f_n(x) = 0$, $n \geqq 1$, har lutter reelle Rødder.

III.

1. En Flade fremstilles i retvinklede Koordinater x, y, z ved Ligningen

Digitized by Google

$$x^2 - y^2 = 2az,$$

hvor a er en positiv Konstant.

Find Stedet for de Punkter paa Fladen, hvor Tangentplanen danner en Vinkel paa 60° med xy-Planen. Find derefter Størrelsen af det Areal paa Fladen, som begrænses af den fundne Kurve.

2 a. Et Kar har Form af en retstaaende Cylinder, hvis Grundflade er en Ellipse med Halvakser a og b ($a > b$). Karret er fyldt med en tung homogen Vædske og er lukket med et Laag, som passer nøje til den Ellipse, som afgrænser Karret foroven. Laaget kan frit dreje sig om en i 2 Punkter af denne Ellipse fastgjort Akse parallel med Ellipsens store Akse. I hvilket Forhold maa Drejningsaksen dele Ellipsens lille Akse naar det skal være muligt, idet man holder Laaget fast, at lægge Karret om paa Siden, saaledes at det kommer til at hvile frit paa en vandret Plan, uden at Vædsken løber ud, naar Laaget atter slippes. Laagets og Karrets Vægt betragtes som forsvindende.

Eller 2 b (for Kandidater med Gymnastik som Bifag).

2 b. I et retvinklet Koordinatsystem x, y er givet en Cykloide, frembragt ved at en Cirkel med Radius a ruller paa x-Aksen. Cirklens Begyndelsesstilling har Centrum $(0, a)$, og den tilsvarende Stilling af det Punkt, som beskriver Cykloiden, er Koordinatsystemets Begyndelsespunkt.

En ret Vinkel bevæger sig saaledes i Planen, at dens ene Ben stadig er Tangent til Cykloiden, medens dens Toppunkt gennemløber Linien $y = 2a$. Bestem Indhyllingskurven for Vinklens andet Ben. Vis, at Kurven er en ny Cykloide kongruent med den givne.

Løsninger:

1. Den søgte Kurves Projektion paa xy-Planen bliver

$$x^2 + y^2 = 3a^2.$$

$$\text{Arealet} = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a\sqrt{3}} \sqrt{r^2 + a^2}\, r dr = \frac{14\pi}{3} a^2.$$

2 a. Aksen maa gaa gennem Trykcentret, og deler saaledes den lille Akse i Forholdet 5 : 3.

2 b. Det ses umiddelbart af den sædvanlige Tangentkonstruktion for Cykloiden, at Linien bliver Tangent til en Cykloide, der

Digitized by Google

beskrives af det diametralt modsatte Punkt paa den rullende Cirkel. Opgaven loses ogsaa let analytisk ved den sædvanlige Parameterfremstilling.

II Del (ældre Ordning).

I.

1. Bestem Konvergensradius ρ for Potensrækken

$$f(x) = (1 - \log(1 + x))^{-a} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n(\alpha)\, x^n;$$

vis, at Koefficienterne $\varphi_n(\alpha)$ tilfredsstiller Funktionalligningen

$$\alpha\varphi_n(\alpha + 1) = (n + 1)\,\varphi_{n+1}(\alpha) + n\,\varphi_n(\alpha),$$

og angiv, hvorledes man kan bestemme Koefficienterne A_r i Udviklingen

$$\varphi_n(\alpha) = \sum_{r=1}^{r=n} A_r \binom{\alpha + r - 1}{r}.$$

Antages $\lim_{n=\infty} \sup. \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma$, skal man endelig vise, at den uendelige Række $\Sigma\, a_n \varphi_n(x)$ er ubetinget konvergent for alle x, naar $\sigma < \rho$, medens denne Række aldrig konvergerer for $\sigma > \rho$, hvor ρ er den ovennævnte Konvergensradius.

2. Det ønskes undersøgt, om et Keglesnit paa eentydig Maade kan bestemmes ved den Betingelse, at ethvert Par paa hinanden følgende Vinkelspidser i en given plan Femkant skal være konjugerede Punkter med Hensyn til Keglesnittet.

Løsninger:

1. Da $f(x)$ har Singulariteterne $x = -1$, $x = e - 1$ og $x = \infty$, faas umiddelbart $\rho = 1$. Differentieres den givne Formel med Hensyn til x, faas

$$\alpha(1 - \log(1 + x))^{-\alpha-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n(\alpha)\, n\,(x^{n-1} + x^n),$$

hvoraf Funktionalligningen umiddelbart udledes. Anvendes Binomialformlen, faas

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \binom{\alpha + n - 1}{n} (\log(1 + x))^n,$$

og der eksisterer følgelig et saadant positivt Tal k, at Rækken paa højre Side er ligelig konvergent for $x \leqq k$. Denne Række

Digitized by Google

tor altsaa, ifølge Weierstrass's Sætning, omformes til en Potensrække. Sættes for m positiv hel

$$(\log(1+x))^m = r_{m,m}x^m + r_{m,m+1}x^{m+1} + \cdots + r_{m,n}x^n \cdots,$$

faas derved

$$\varphi_n(\alpha) = r_{n,n}\binom{\alpha+n-1}{n} + r_{n-1,n}\binom{\alpha+n-2}{n-1} + \cdots + r_{1,n}\binom{\alpha}{1}.$$

Koefficienterne $r_{n,m}$ findes angivet i Niels Nielsens Funktionsteori, p. 375, Formel (12). Da man for alle x har

$$\lim.\sup_{n=\infty} \sqrt[n]{\varphi_n(x)} = 1,$$

er Sætningen om Rækken $\Sigma a_m \varphi_n(x)$ umiddelbart indlysende; sammenlign Funktionsteori § 91.

2. De 3 første Vinkelspidser i Femkanten har Koordinaterne (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), den fjerde (1, 1, 1) og den femte (p, q, r).

Det søgte Keglesnit er

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Betingelsen for, at Punkterne x og y er konjugerede, udtrykkes ved

$$\left.\begin{array}{l} x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) \\ + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) \\ + x_3(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) \end{array}\right\} = 0.$$

Ved Indsættelse af de givne Rækkers Koordinater faar man heraf:

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0$$
$$(a_{11} + a_{21} + a_{31})p + (a_{12} + a_{22} + a_{32})q + (a_{13} + a_{23} + a_{33})r = 0$$
$$a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r = 0,$$

hvoraf

$$a_{33} = p, \quad a_{11} = r, \quad a_{22} = \frac{p(p-r)}{q},$$
$$a_{31} = -p, \quad a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0.$$

Keglesnittet er altsaa bestemt.

II.

1. Idet $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_rx^{n-r} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, og man for $0 \leq p \leq n$ sætter $f_p(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \cdots + a_{p-1}x + a_p$, skal man bevise Formlen.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(x)f_p(x)\,dx}{f(x)} = (n-p)a_p,$$

hvor Integrationsvejen C omslutter samtlige Nulpunkter for Polynomiet $f(x)$.

Digitized by Google

2. Vis, at i den ubestemte Ligning af anden Grad

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

maa y altid være lige, og vis dernæst, at enhver Konvergent i den uendelige periodiske Kædebrøk, der fremstiller $\sqrt{8}$, er det dobbelte af Konvergenten med samme Mærketal i den for $\sqrt{2}$ erholdte Kædebrøk.

3. Find det til Polen $x = 0$ svarende Residuum for Funktionen

$$(\log(1+x))^{-n},$$

hvor n er positiv, hel.

Løsninger:

1. Integranden har samtlige Nulpunkter i $f(x)$ til simple Poler, men ellers ingen Singulariteter. Er α et m-dobbelt Nulpunkt for $f(x)$, bliver det til Polen α svarende Residuum

$$\lim_{x=\alpha} \frac{(x-\alpha) f'(x) f_p(x)}{f(x)} = m f_p(\alpha).$$

Er $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n$ samtlige Rødder i den algebraiske Ligning $f(x) = 0$, bliver Integralets Værdi følgelig

$$\mathcal{J} = f_p(\alpha_1) + f_p(\alpha_2) + \cdots + f_p(\alpha_n) = a_0 s_p + a_1 s_{p-1} + \cdots + a_{p-1} s_1 + n a_p,$$

hvor $s_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \cdots + \alpha_n^m$. Anvendes Newtons Formler, faas endelig

$$\mathcal{J} = (n-p)\, a_p$$

2. Da x maa være ulige, bliver $x^2 - 1$ delelig med 8, og y maa følgelig være et lige Tal, saaledes at Ligningen ogsaa kan skrives som $u^2 - 8v^2 = 1$, $x = u$, $y = 2v$. Kaldes Konvergenttællere og Konvergentnævnere i Kædebrøkerne

$$\sqrt{2} = 1, 2, 2, 2, \cdots, \quad \sqrt{8} = 2, 1, 4, 1, 4, \cdots$$

henholdsvis y_n og z_n, y_n og z'_n, bliver Løsningerne af $x^2 - 2y^2 = 1$ og af $u^2 - 8v^2 = 1$ henholdsvis

$$x = y_{2n+1}, \quad y = z_{2n+1}, \quad u = y'_{2n+1}, \quad v = z'_{2n+1},$$

og altsaa haves $y_{2n+1} = y'_{2n+1}$, $z_{2n+1} = 2z'_{2n+1}$. Antages $y'_{2n} = 2y_{2n}$, $z'_{2n} = z_{2n}$, faas

$$y'_{2n+2} = 4y'_{2n+1} + y'_{2n} = 4y_{2n+1} + 2y_{2n} = 2y_{2n+2}$$
$$z'_{2n+2} = 4z'_{2n+1} + z'_{2n} = 2z_{2n+1} + z_{2n} = z_{2n+2}.$$

Naturligvis kan Opgaven løses helt ved Induktion uden Benyttelse af ovennævnte ubestemte Ligninger.

3. Da Funktionen har en Pol af n'te Orden i $x = 0$, faas

$$(\log(1+x))^{-n} = \frac{a_{n,1}}{x} + \frac{a_{n,2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n,n}}{x^n} + f(x),$$

Digitized by Google

hvor $f(x)$ er sædvanlig Potensrække med Konvergensradius 1.

Differentieres med Hensyn til x, faas

$$n(\log(1+x))^{-n-1} = \frac{a_{n,1}}{x} + \frac{a_{n,1} + 2a_{n,2}}{x^2} + \cdots + \frac{na_{n,n}}{x^{n+1}} + (1+x)f'(x),$$

og altsaa haves $na_{n+1,1} = a_{n,1}$, hvoraf det søgte Residuum

$$a_{n,1} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

III.

En Flade er givet ved 2 Systemer af Parameterkurver, hvorved hvert Punkt paa Fladen henføres til 2 Parametre q_1 og q_2. Den hertil svarende 1ste Fundamentalform er

$$ds^2 = E\,dq_1^2 + 2F\,dq_1dq_2 + G\,dq_2^2.$$

hvor E, F, G er bekendte Funktioner af q_1 og q_2.

1. Naar nu et Punkt er bundet til uden Gnidning og under Paavirkning af givne ydre Kræfter at bevæge sig paa Fladen, skal man opstille de almindelige Lagrange'ske Ligninger for Punktets Bevægelse.

2. Dernæst undersøges særligt det Tilfælde, hvor ingen ydre Kræfter virker, og det ønskes eftervist, hvorledes man ad denne Vej kan bestemme de geodætiske Kurver paa Fladen.

Eksempel: $E = 1$, $F = 0$, $G = e^{2q_1}$.

Løsning:

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2$$

bestemmer $$2T = Eq_1'^2 + 2Fq_1'q_2' + Gq_2'^2,$$

altsaa $$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = Eq_1' + Fq_2', \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = Fq_1' + Gq_2',$$

saa at Lagranges Ligninger antager Formen

$$2\frac{d(Eq_1' + Fq_2')}{dt} - \left(\frac{\partial E}{\partial q_1}q_1'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial q_1}q_1'q_2' + \frac{\partial G}{\partial q_1}q_2'^2\right) = Q_1$$

$$2\frac{d(Fq_1' + Gq_2')}{dt} - \left(\frac{\partial E}{\partial q_2}q_1'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial q_2}q_1'q_2' + \frac{\partial G}{\partial q_2}q_2'^2\right) = Q_2.$$

Sættes heri $Q_1 = Q_2 = 0$ faas Differentialligningerne for de geodætiske Kurver.

I Eksemplet $E = 1$, $F = 0$, $G = e^{2q_1}$ (Flader med konstant Krumning) faar man:

$$q_1' - e^{2q_1}q_2'^2 = 0, \quad \frac{d(e^{2q_1}q_2')}{dt} = 0,$$

altsaa $$q_2' = ke^{-q_1}, \quad q_1'' = k^2e^{-2q_1},$$

der let integreres.

Digitized by Google

II Del (ny Ordning).

I.

1. I et sædvanligt Trekantskoordinatsystem er givet en Kurve med Ligningen

$$x_1x_2x_3 + ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3 = 0,$$

hvor a, b, c og d er Konstanter.

Find Ligningen for den Hesse'ske Kurve, og bestem Koordinaterne til Vendepunkterne paa den givne Kurve.

2. I et 3-dimensionalt Rum er givet en vindskæv Femkant $ABCDE$. Tetraedret $ABCD$ vælges som Koordinattetraeder, E som Enhedspunkt. Vis derved, at der eksisterer et Nulsystem, hvori hvilke som helst 2 paa hinanden følgende Vinkelspidser i Femkanten (A og B, B og C, C og D, D og E, E og A) er konjugerede.

Løsninger:

1. Den Hesseske Kurve bliver

$$\begin{vmatrix} 6ax_1 + 2bx_2 & x_3 + 2bx_1 + 2cx_2 & x_2 \\ x_3 + 2bx_1 + 2cx_2 & 2cx_1 + 6dx_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

eller $$x_1x_2x_3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 - 3ax_1^3 - 3dx_2^3 = 0.$$

Skæringspunkterne med den givne Kurve bestemmes ved

$$ax_1^3 + dx_2^3 = 0, \quad x_3 + bx_1 + cx_2 = 0,$$

hvoraf $$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}, \quad \frac{x_3}{x_2} = -c - b\cdot\frac{x_1}{x_2}.$$

altsaa 3 Vendepunkter beliggende paa en ret Linie.

2. Nulsystemet bestemmes ved en Ligning af Formen

$$x_1(0\cdot\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14}\xi_4) + x_2(-a_{12}\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24}\xi_4) + x_3(-a_{13}\xi_1 - a_{23}\xi_2 + 0\cdot\xi_3 + a_{31}\xi_4) + x_4(-a_{14}\xi_1 - a_{24}\xi_2 - a_{34}\xi_3 + 0\cdot\xi_4) = 0.$$

Her skal (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), 1, 1, 1, 1 i Kreds være konjugerede, altsaa

$$a_{34} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = -a_{14}, \quad a_{24} = -a_{14}.$$

Nulsystemets Ligning bliver da

$$x_1(-\xi_3 + \xi_4) - x_2\xi_1 + x_3\xi_1 + x_4(\xi_2 - \xi_1) = 0.$$

Da man straks ser, at Koefficienterne ikke samtidig kan være Nul, er Nulsystemets Eksistens hermed bevist.

II.

Som ældre Ordning.

Digitized by Google

III

En ret Linie skrues omkring en fast Akse, som den skærer under en Vinkel paa 45°. Den reducerede Skruehøjde, d. v. s. den Stigning, der svarer til Drejningsvinklen 1, er a.

Angiv en Parameterfremstilling af den frembragte Skrueflade, og find det tilsvarende Linieelement.

Vis dernæst, at Fladen kan underkastes en saadan Bøjning, at den antager Form af en Omdrejningshyperboloide, saaledes at Skruefladens retlinede Frembringere føres over i det ene System af retlinede Frembringere paa Hyperboloiden.

Løsning:

Parameterfremstilling for Skruefladen:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u + av.$$

Bueelementet:

$$ds^2 = 2du^2 + 2adudv + (a^2 + u^2)\,dv^2,$$

eller

$$ds^2 = \frac{2u^2 + a^2}{u^2 + a^2}\,du^2 + (u^2 + a^2)\left(dv + \frac{adu}{u^2 + a^2}\right)^2.$$

En Omdrejningsflade med Meridianen $z = f(r)$ har Bueelementet

$$ds^2 = (1 + f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Man sætter da:

$$\frac{2u^2 + a^2}{u^2 + a^2}\,du^2 = (1 + f'(r)^2)\,dr^2,$$

$$(u^2 + a^2)\left(dv + \frac{adu}{u^2 + a^2}\right)^2 = r^2 d\theta^2.$$

Heraf faas $\sqrt{u^2 + a^2} = mr,$

hvor m er en Konstant, og derefter:

$$f'(r)^2 = \frac{(2m^4 - m^2)\,r^2 + a^2(1 - m^2)}{m^2 r^2 - a^2}.$$

For $m = 1$, kan man sætte:

$$f'(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad f(r) = \sqrt{r^2 - a^2},$$

hvortil svarer en Omdrejningshyperboloide med Meridiankurve

$$z = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Overgangen fra den ene Flade til den anden bestemmes ved

$$\sqrt{u^2 + a^2} = r, \quad v + \operatorname{arctg}\frac{u}{a} = \theta,$$

hvorved man let paaviser, at Skruefladens rette Linier føres over i Hyperboloidens ene Frembringersystem.

Digitized by Google

Om antik Brug af den moderne Irrationalitetstheoris Synsmaader.

Aabent Brev til Professor N. Nielsen.
Fra H. G. Zeuthen.

Kjære Professor N. Nielsen! I min Opposition ex. aud. ved Dr. Kobbernagels Disputats omtalte jeg de Fordele, som det mundtlige og offentlige Forsvar bringer Forf., som derved faar Lejlighed til at afbøde Misforstaaelser af hans Arbejde og at hidføre den tilsigtede Opfattelse af hans Betragtningsmaader. Dertil knyttede jeg en Paaskjønnelse af, at Præses omvendt ved nogle af sine tilføjede, velvalgte Theses gav ogsaa mig Lejlighed til at opnaa lignende Fordele med Hensyn til nogle af mine Arbejder, og jeg benyttede mig deraf til at forklare min Brug af en Methode, hvis Anvendelighed han i en af disse Theses havde draget noget i Tvivl.

En anden af hans Theses, om hvilken jeg selv er ganske enig med ham, fremkaldte fra Deres Side Indvendinger mod Opfattelser, som jeg har gjort stærkt gjældende i mine historiske Skrifter, og Deres aabne, endog ret kraftige Udtalelse af denne Afvigelse giver mig ligeledes en velkommen Lejlighed til ogsaa paa dette Punkt at forsvare mig og derved om muligt, ikke blot overfor Dem, men ogsaa overfor Læsere af dette Tidsskrift, som maatte dele Deres Opfattelse, at fjerne den Misforstaaelse, hvorpaa den efter min Overbevisning beror.

Jeg tænker herved paa Deres Opposition mod Dr. Kobbernagels Thesis 1, hvori han udtaler, at Proportionslæren i Euklids V Bog falder sammen med den moderne Dedekind'ske Irrationalitetstheori. Denne Paastand gav Dem Anledning til i større Almindelighed at udtale Dem imod Paastanden om Overensstemmelser mellem Hovedprincipper i den moderne Irrationalitetslære og dem, der allerede gjøres gjældende af Mathematikere i Oldtiden; Deres Betegnelse »en gammel Traver« udtrykte tydelig, at De selv ikke vil anerkjende en saadan Overensstemmelse, om De end gjorde en lille Inrømmelse med Hensyn til Doktorandens Paastand i hans Thesis. Derved fik Doktoranden ikke Lejlighed til at forsvare denne, hvad der vistnok vilde have givet Dem Anledning til at forklare og begrunde Deres Indvendinger mod den omtalte Overensstemmelse, hvorpaa Thesis netop

Digitized by Google

fremhæver et af de mest udprægede Exempler. En Begrundelse og Forklaring fra Deres Side var ogsaa jeg afskaaret fra at fremkalde, da jeg bag efter fik Ordet, idet jeg jo skulde opponere mod Præses og ikke mod Dem, som ikke engang vilde faa Lejlighed til at svare mig.

Til Forklaring af Deres Opfattelse maatte man derfor nøjes med en Henvisning, som De allerede havde givet i Deres Svar til Præses, nemlig til Pringsheims Fremstilling af Læren om irrationale Tal i det 1898 udkomne Hæfte I A. 3 af Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Til en bedre Redegjørelse for den moderne Lære om irrationale Tal kunde der vistnok heller ikke henvises, og for mit Vedkommende har jeg flittig benyttet denne Artikel, naar jeg vilde komme helt paa det rene med de Overensstemmelser med denne Lære, som trods store formelle Afvigelser kan paavises i den antike Behandling af irrationale Størrelser; men til Grund for sikre Domme om Betydningen og Rækkevidden af saglige Overensstemmelser og formelle Afvigelser, kræves endnu et lige saa grundigt Studium af de Forfattere i Oldtiden, hos hvem dette Emnes Behandling træder os direkte i Møde eller har sat Spor. Paa et saadant indlader Pringsheim sig ikke paa det anførte Sted, og hvad han siger herom, er meget mere en Begrundelse af, at en Efterspøring af mulig Tilknytning af den moderne Irrationalitetslære til den antike ligger udenfor den ham paa dette Sted paahvilende Opgave. Heri har han sikkert været bestyrket ved det for Artikler i Encyklopædien opstillede Program, som kun for Tiden »seit dem Beginn des 19 Jahrhundert« kræver »die Nachweisung der geschichtlichen Entwickelung durch sorgfältige Litteranturangaben.« I Overensstemmelse hermed støtter han sig for Oltidens Forfattere ikke saa meget paa direkte Citater af disse som paa Henvisning til Historikere, hvis Tydning han følger, og med hvem han deler en Opfattelse af Betydningen af den geometriske Fremstilling, som i alt Fald ikke passer paa Euklids V. Bog og Begyndelsen af X. Bog, hvor Liniestykker, som nu til Dags Bogstaver betegner ganske vilkaarlige Størrelser, (i Euklids arithmetiske Bøger vilkaarlige hele Tal). Da nu Euklid X., 7 udtrykkelig siger, at »inkommensurable Størrelser ikke forholde sig som Tal til hinanden«, slutter Pringsheim, at Euklids Lære ikke kan komme den ham paahvilende Redegjørelse for Læren om Irrationaltal ved At der hos Euklid kun er Tale om en mere begrænset Brug

Digitized by Google

af Ordet »Tal« nemlig som hele Tal, og at de gamles vel definerede Begreb om Forholdet mellem to vilkaarlige Liniestykker ganske dækker det moderne Begreb »reelt (rationalt eller irrationalt) Tal«, fremgaar imidlertid af den Forklaring af Euklids V Bog, som Hankel havde givet i sit efterladte, ufuldførte Værk: Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (1874). Denne Forklaring er heller ikke Pringsheim ukjendt, om han end citerer den efter det senere Værk af Stolz: Allgemeine Arithmetik (1885), og Pringsheim indrømmer, at den kunde »omdannes« til en uangribelig Theori for de reelle Tal. Hvor afgjørende en Vægt han lægger paa Brugen af Ordet »Tal«, ses ogsaa af hans paafølgende Omtale af Stifels Brug af Betegnelsen irrationale »Tal« som Overgangsled til de moderne Begreber, hvormed han selv skal beskjæftige sig i Encyklopædien. Naar Stifel dernæst tillægger ethvert irrationalt Tal en entydig bestemt Plads i den ordnede Talrække, ser han da ogsaa heri en saglig Overensstemmelse med moderne Anskuelser. Den almindelige Begrundelse heraf, som han savner hos Stifel, findes i Virkeligheden i Euklids V. Bog.

Ved saaledes at holde sig til, hvad der udtrykkelig kaldes Tal, og holde dette Begreb helt ude fra saadanne, som man i Oltiden havde givet en geometrisk Iklædning, nævner Pringsheim i Virkeligheden det Udgangspunkt, ud fra hvilket man i den nyere Tid havde bemærket Nødvendigheden af en saadan Irrationalitetstheori som den, hvormed han dernæst skal beskæftige sig, og det var til dette moderne Udgangspunkt, at den umiddelbart havde knyttet sig. Vel var det ved at knytte sine Definitioner af de almindelige Regningsarter til den euklidske Proportionslære, at endnu Descartes fandt et Middel til at gjøre dem lige anvendelige paa rationale og irrationale Tal*), men efter hans Tid havde man under stadig Brug af den oprindelig paa Regning med hele Tal grundede Algebra og dennes moderne Symbolisering vænnet sig til af dens rige Anvendelighed, som man bestandig fandt Lejlighed til at erfare, at slutte dens Almengyldighed uden at tænke paa det forud givne Grundlag, hvortil Descartes havde anset det for fornødent at henvise. Da man saa senere blev var, at man savnede et sikkert logisk Grundlag for den Udvidelse, hvorved irrationale Tal

*) Se mine Forelæsninger over Mathematikens Historie, XVI og XVII Aarhundrede. S. 287—288.

Digitized by Google

optoges i Talrækken og gjordes til Gjenstand for Regning, maatte man paany søge et saadant Grundlag. Først bagefter har man bemærket, at det samme Savn har været følt i Oldtiden og er afhjulpet ved den almindelige Proportionslære, i Euklids V. Bog, og at det er for at raade Bod paa dette Savn, at denne har faaet en Form, der for den, der ikke havde bemærket det nævnte Formaal, maatte forekomme unødvendig kunstig. Da det er det samme Savn som afhjælpes, er det ikke underligt, at man ogsaa bagefter har kunnet finde Overensstemmelse i den Maade, hvorpaa det er afhjulpet i Oldtid og Nutid.

Det kan maaske beklages, at Pringsheims Opfattelse af hans Opgaves Begrænsning og den begrænsede Plads, som stod til hans Raadighed, har hindret ham i at gaa ind paa en Overensstemmelse, der vilde give et videre Syn paa Tanker, der til forskjellige Tider har kunnet fremtræde i ret forskellige Former. Men det, som jeg her vil benægte, det er kun Deres Henvisning til Pringsheims Encyklopædiartikel, som om den skulde indeholde en Begrundelse af Deres Bemærkninger mod den paastaaede Overensstemmelse mellem den antike og moderne Irrationalitetslære.

Hvorledes jeg for mit Vedkommende opfatter denne Overensstemmelse samt Overensstemmelsen mellem den antike Omgaaen af Unendelighedsbegrebet og den moderne exakte Begrundelse af Infinitesimalregningen har jeg fremsat og begrundet historisk og logisk i Kap. XI af min ret omfangsrige Afhandling: »Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rationel Videnskab« (Videnskabernes Selskabs Skrifter, naturv. math. Afh. 8 Række I. 5 (1917)). Henvisningen til dette Skrift vil ogsaa forklare den Vægt, som jeg tillægger denne Overensstemmelse, der stilles ved Siden af andre lignende paa andre Omraader af Mathematiken. Jeg sammenstiller nemlig det ældre Kjendskab til forskjellige mathematiske Sandheder med den Begrundelse, som man gav dem, efterat paa Platons Tid Kravet om og Principerne for en virkelig exakt Begrundelse var bleven gjort gjældende. Til denne Reform gav i en væsentlig Grad den tidligere Opdagelse af irrationale Størrelser Anledning, idet man indsaa, at ikke alle Begrundelser, som gjaldt, naar de paagjældende Størrelser var rationale, vedblivende vilde beholde deres Gyldighed, naar dette ikke var Tilfældet. Herved fremkom de særlige Behandlinger af irrationale Størrelser, som vi har sammenlignet med den moderne Lære om irrationale Tal. End-

Digitized by Google

videre saa man Nødvendigheden af at omdanne den tidligere brugte geometriske Anskueliggjørelse af vilkaarlige Størrelser, irrationale saavel som rationale, til en exakt geometrisk Behandling, det er en saadan, hvor Resultaterne paavises som logisk Følge af udtrykkelig opstillede Forudsætninger. I forskjellige Kapitler af det anførte Skrift viser jeg den Indflydelse, som Indførelsen af de nye Principer fik paa Behandlingen af forskjellige Emner. En lignende Behandling har jeg i et lige udkommet Arbejde: »Sur l'origine de l'algébre« underkastet den antike Fremstilling, Løsning og Diskussion af Ligninger af anden Grad.

I nogle Tilfælde har den reformerede Behandling holdt sig indtil vore Dage, selv om man ikke til alle Tider har haft Blikket aabent for de logiske Krav, som de anvendte Former vare bestemte til at tilfredsstille. Sandsen for disse Krav har endog ofte været mindst aaben paa Omraader, hvor man i nye Tider gjorde mægtige reale Fremskridt og rettede sin hele Opmærksomhed paa disse. Som vi nys bemærkede, gjaldt dette længe Algebraen og dens ligelige Anvendelse paa rationale og irrationale Størrelser. Det gjaldt ogsaa Infinitesimalregningen, som man gjorde til et mægtigt Organ for mathematisk Forskning uden samtidig at underbygge den med et exakt formuleret Uendelighedsbegreb. Det var i Følelsen af Savnet af et saadant, at de gamle i deres strenge Beviser for deres langt mere begrænsede Anvendelse af lignende Betragtninger helt undgik Brugen af Ordet uendelig, som ellers ikke var dem ubekjendt, og omgik det ved f. Ex. at forudsætte en Deling dreven saa vidt, at Delene bliver mindre end en given Størrelse. Den Betragtning, som de gamle saaledes anvendte paa de enkelte Opgaver, som de løste, er den samme, som i XIX Aarhundrede anvendtes til at give den da opførte Infinitesimalregning et sikkert logisk Grundlag.

Ja nu, kjære Professor Nielsen, er det nok nærmest mig der maa bede Dem om Undskyldning. En, som jeg antager mindre vel overvejet Bemærkning i en mundtlig Forhandling havde der vel næppe været Grund til at dvæle saa længe ved; men nu har jeg benyttet den som Anledning til at pege hen paa de Sider af Udbyttet af min historiske Forskning, hvori jeg selv ser det vigtigste Bidrag, som jeg kan have ydet til vor Forstaaelse af Mathematikens Udviklingsgang fra dens første Oprindelse indtil dens nutidige Skikkelse.

Digitized by Google

En determinantberäkning.

Af A. Arwin.

Jag utgår från ett system lineära ekvationer

$$\sum_{\nu=1}^{\tau-1} M_\nu a_\nu^r = A_r^{(1)} \qquad (r = 1,2 \cdots \tau - 1 \qquad (1$$

där M_ν äro sökta och $A_r^{(1)}$ givna storheter.

Løses System (1) efter exempelvis M_1, så får man

$$M_1 \begin{vmatrix} a_1 a_2 & \cdots\cdots & a_{\tau-1} \\ a_1^2 a_2^2 & & a_{\tau-1}^2 \\ \vdots & & \\ a_1^{\tau-1} a_2^{\tau-1} & & a_{\tau-1}^{\tau-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} a_2 & \cdots\cdots & a_{\tau-1} \\ A_2^{(1)} a_2^2 & & a_{\tau-1}^2 \\ \vdots & & \\ A_{\tau-1}^{(1)} a_2^{\tau-1} & & a_{\tau-1}^{\tau-1} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Här är M_1 multipliserad med den bekanta Vandermondska determinanten*) och vår uppgift är att söka beräkna determinanten till höger. För den skull inför jag beteckningen

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} 1 & \cdots\cdots & 1 \\ A_2^{(1)} a_2 & & a_{\tau-1} \\ \vdots & & \\ A_{\tau-1}^{(1)} a_2^{\tau-2} & & a_{\tau-1}^{\tau-2} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Drages i (3) andra kolonnen från alla de följande, så får man för

$$D_1 = D_2 (a_3 - a_2) \cdots (a_{\tau-1} - a_2).$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 \\ A_2^{(1)} & a_2 & 1 & 1 \\ A_3^{(1)} & a_2^2 & a_3^2 - a_2^2 & a_{\tau-1}^2 - a_2^2 \\ & & a_3 - a_2 & a_{\tau-1} - a_2 \\ \vdots & & & \\ A_{\tau-1}^{(1)} & a_3^{\tau-2} & \dfrac{a_3^{\tau-2} - a_2^{\tau-2}}{a_3 - a_2} & \dfrac{a_{\tau-1}^{\tau-2} - a_2^{\tau-2}}{a_{\tau-1} - a_2} \end{vmatrix}$$

* Kovalewsky G.: Einführung in die Determinantentheorie 1909 S. 41.

Digitized by Google

Multipliceras nu i D_2 varje rad med a_2 och drages från den understående, började nedanifrån, så erhåller man med hänsyn till

$$\frac{a_\nu^m - a_2^m}{a_\nu - a_2} - a_2 \frac{a_\nu^{m-1} - a_2^{m-1}}{a_\nu - a_2} = a_\nu^{m-1} \quad \begin{pmatrix} m = 2, 3 \cdots \tau - 2 \\ \nu = 3, 4 \cdots \tau - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

och beteckningarne

$$A_\nu^{(1)} - a_2 A_{\nu-1}^{(1)} = A_\nu^{(2)} \qquad (\nu = 2, 3 \cdots \tau - 1) \qquad (5)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2^{(2)} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ A_3^{(2)} & 0 & a_3 & a_4 & a_{\tau-1} \\ \vdots & & & & \\ A_{\tau-1}^{(2)} & 0 & a_3^{\tau-3} & a_4^{\tau-3} & a_{\tau-1}^{\tau-3} \end{vmatrix}$$

Drages i D_2 tredje kolonnen från alla följande, så får man

$$D_2 = D_1 (a_4 - a_3) \cdots (a_{\tau-1} - a_3)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_2^{(2)} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_3^{(2)} & 0 & a_3 & 1 & 1 \\ A_4^{(2)} & 0 & a_3^2 & \dfrac{a_4^2 - a_3^2}{a_4 - a_3} & \dfrac{a_{\tau-1}^2 - a_3^2}{a_{\tau-1} - a_3} \\ \vdots & & & & \\ A_{\tau-1}^{(2)} & 0 & a_3^{\tau-3} & \dfrac{a_4^{\tau-3} - a_3^{\tau-3}}{a_4 - a_3} & \dfrac{a_{\tau-1}^{\tau-3} - a_3^{\tau-3}}{a_{\tau-1} - a_3} \end{vmatrix}$$

Multiplisera vi åter varje rad med a_3 och subtrahera som ovan, så få vi med hänsyn till

$$\frac{a_\nu^m - a_3^m}{a_\nu - a_3} - a_3 \frac{a_\nu^{m-1} - a_3^{m-1}}{a_\nu - a_3} = a_\nu^{m-1} \qquad \begin{pmatrix} m = 2, 3 \cdots \tau - 3 \\ \nu = 4, 5 \cdots \tau - 1 \end{pmatrix}$$

och beteckningen

$$A_\nu^{(2)} - a_3 A_{\nu-1}^{(2)} = A_\nu^{(3)} \qquad (\nu = 3, 4 \cdots \tau - 1) \qquad (5')$$

Digitized by Google

$$D_2 = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ A_2^{(2)} & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ A_3^{(3)} & 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ A_4^{(3)} & 0 & 0 & a_4 & a_5 & & a_{\tau-1} \\ \vdots & & & & & & \\ A_{\tau-1}^{(3)} & 0 & 0 & a_4^{\tau-4} & a_5^{\tau-5} & & a_{\tau-1}^{\tau-4} \end{vmatrix}$$

Härav inser man omedelbart riktigheten av följande formel

$$D_{m-2} = D_{m-1}(a_m - a_{m-1}) \cdots (a_{\tau-1} - a_{m-1})$$

med

$$D_{m-1} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ A_2^{(2)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3^{(3)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ A_{m-1}^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ A_m^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_m & a_{m+1} & a_{\tau-1} \\ \vdots & & & & & & & & \\ A_{\tau-1}^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_m^{\tau-m} & a_{m+1}^{\tau-m} & a_{\tau-1}^{\tau-m} \end{vmatrix}$$

Man får därför

$$D_{\tau-2} = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ A_2^{(2)} & 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ A_3^{(3)} & 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ A_m^{(m)} & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ A_{\tau-3}^{(\tau-3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 1 & 0 \\ A_{\tau-2}^{(\tau-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{\tau-1}^{(\tau-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{\tau-1} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

som giver oss $(-1)^{\tau-2} D_{\tau-2} = A_{\tau-1}^{(\tau-2)} - a_{\tau-1} A_{\tau-2}^{(\tau-2)}$. (6)

Införas nu steg för steg värdena

$$A_\nu^{(s)} = A_\nu^{(s-1)} - a_s A_{\nu-1}^{(s-1)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = s,\ s+1,\ \cdots\ \tau-1 \\ s = 2,\ 3,\ \cdots\cdots\ \tau-1 \end{pmatrix} \quad (5'')$$

så få vi till en början av (6)

$$(-1)^{\tau-2} D_{\tau-3} = (a_{\tau-1} - a_{\tau-2}) \left[A_{\tau-1}^{(\tau-3)} - A_{\tau-2}^{(\tau-3)} (a_{\tau-2} + a_{\tau-1} + A_{\tau-3}^{(\tau-3)} a_{\tau-1} a_{\tau-2} \right]$$

och vidare allmänt

$$(-1)^{\tau-2} D_{\tau-m} = (a_{\tau-1} - a_{\tau-2}) (a_{\tau-2} - a_{\tau-3}) (a_{\tau-1} - a_{\tau-2}) \cdots (a_{\tau-m+2} - a_{\tau-m+1}) \cdots (a_{\tau-1} - a_{\tau-m+1}).$$

$$\left[A_{\tau-1}^{(\tau-m)} - A_{\tau-2}^{(\tau-m)} \sum_{i \leq m-1} a_{\tau-i} + A_{\tau-3}^{(\tau-m)} \sum_{i \neq k < m-1} \sum a_{\tau-i} a_{\tau-k} - \cdots + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\nu-1} A_{\tau-\nu}^{(\tau-m)} \sum_{i \neq k \neq} (\nu-1) \sum_{\neq s < m-1} a_{\tau-i} a_{\tau-k} \cdots a_{\tau-s} + \cdots \right]$$

Vi få alltså för D_1 från (3) följande uttryck

$$\left. \begin{aligned} (-1)^{\tau-2} D_1 = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots & \quad (a_{\tau-1} - a_2) \\ \cdot\ (a_4 - a_3) \cdots & \quad (a_{\tau-1} - a_3) \\ \vdots & \\ & \quad (a_{\tau-1} - a_{\tau-2}) \\ \left[A_{\tau-1}^{(1)} - A_{\tau-2}^{(1)} \sum_{i \geq 2} a_i + A_{\tau-3}^{(1)} \sum_{i \neq k > 2} \sum a_i a_k - \cdots + \right. & \\ \left. + (-1)^{\nu-1} A_{\tau-\nu}^{(1)} \sum_{i \neq k \neq} (\nu-1) \sum_{\neq s > 2} a_i a_k \cdots a_s + \cdots \right]. & \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Lått oss nu antaga, att a_ν äro de enkla rötterna til ekvationen

$$f(x) \equiv x^{\tau-1} + b_1 x^{\tau-2} + b_2 x^{\tau-3} + \cdots + b_{\tau-1} = 0 \quad (8)$$

så erhålla vi

$$\sum_{i>2} a_i + a_1 = -b_1.$$

Digitized by Google

Av $$\sum_{i \neq k > 2} \sum a_i a_k + a_1 \sum_{i > 2} a_i = (-1)^2 b_2$$

framgår

$$\sum_{i \neq k > 2} \sum a_i a_k = (-1)^2 [a_1^2 + b_1 a_1 + b_2] \qquad (9)$$

d. v. s. allmänt

$$\sum_{i \neq k \neq \quad \neq s \neq t > 2} (\nu) \sum a_i a_k \cdots a_s a_t = (-1)^\nu [a_1^\nu + b_1 a_\nu^{\nu-1} + \cdots + b_\nu].$$

Införas dessa värden i (7), så får parantesen följande utseende

$$\left.\begin{aligned} A_1^{(1)} \sum_{m=0}^{\tau-2} a_1^m b_{\tau-2-m} + \cdots A_{\tau-\nu}^{(1)} \sum_{m=0}^{\nu-1} a_1^m b_{\nu-1-m} + \cdots A_{\tau-1}^{(1)} \\ = \sum_{m=1}^{\tau-1} a_1^{\tau-m-1} \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu^{(1)} b_{m-\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Av (8) och med hänsen till (7) och (2) få vi följaktligen

$$M_1 = \frac{\sum_{m=1}^{\tau-1} a_1^{\tau-m-1} \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu^{(1)} b_{m-\nu}}{a_1 \cdot f'(a_1)} \qquad (11)$$

vilket giver det uttryck, som jag ville deducera. På samma sätt kan M_ρ beräknas, om man endast byter a_1 mot a_ρ.

Om Rækkerne $\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(2s+1)^q}{s^m (s+1)^m}$; $2m - q > 1$.

Af S. P. Sørensen.

Lad m og n være to positive hele Tal og a et vilkaarligt Tal $\neq 0$. Der gælder da som bekendt Dekompositionsformlen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x^n(x-a)^m} &= (-1)^m \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{m+r-1}{m-1} \frac{1}{x^{n-r}} \frac{1}{a^{m+r}} \\ &+ \sum_{r=0}^{r=m-1} (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1} \frac{1}{a^{n+r}} \frac{1}{(x-a)^{m-r}}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Sætter man heri $m = n$ og $a = -1$, findes

$$\frac{1}{x^n(x+1)^n} = \sum_{r+0}^{r=n-1} (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1} \left(\frac{1}{x^{n-r}} + (-1)^{n-r} \frac{1}{x^{n-r}} \right). \quad (2$$

Lader man dernæst i (2) x efterhaanden antage Værdierne 1, 2, 3, ⋯ og adderes alle de saaledes erholdte Ligninger, findes, idet vi for Kortheds Skyld har sat

$$s_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots, \qquad (p = 2, 3, \cdots).$$

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^n(s+1)^n} = \sum_{r=0}^{r=n-2} (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1} (s_{n-r}(1 + (-1)^{n-r})$$

$$-(-1)^{n-r}) + (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} \cdot \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right),$$

eller hvad der er det samme,

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^n(s+1)^n} = \sum_{r=0}^{r=n-2} (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1} (s_{n-r}(1 + (-1)^{n-r})$$

$$-(-1)^{n-r}) + (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}.$$

Af denne Ligning fremgaar det umiddelbart, at

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^n(s+1)^n}$$

under endelig Form kan udtrykkes ved reciproke Potenssummer af de naturlige Tal med udelukkende lige Eksponenter, hvad enten n er lige eller ulige.

Dette Forhold førte mig til den Antagelse, at Rækkerne

Digitized by Google

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(2s+1)^q}{s^m(s+1)^m},$$

til hvilken Type ovenstaaende Række jo hører, muligvis har lignende Egenskaher, naar q antages lige.

For at undersøge Sagen nøjere vil vi betragte Differentialkvotienterne af Funktionen

$$y = \frac{1}{x^n(x+1)^n}.$$

Vi finder

$$D_x\left(\frac{1}{x^n(x+1)^n}\right) = -n\,\frac{2x+1}{x^{n+1}(x+1)^{n+1}}$$

$$D_x^{(2)}\left(\frac{1}{x^n(x+1)^n}\right) = n(n+1)\,\frac{(2x+1)}{x^{n+2}(x+1)^{n+2}} - \frac{2n}{x^{n+1}(x+1)^{n+1}},$$

. . . . . .

. . . . . .

hvoraf det fremgaar, at de højere Differentialkvotienter af vor Funktion deler sig i to skarpt adskilte Grupper, af hvilke den ene udelukkende indeholder Størrelser, hvor $2x+1$ forekommer i lige Potenser, medens den anden indeholder alle de andre, altsaa dem, i hvilke den samme Størrelse forekommer i udelukkende ulige Potenser. Er det Tal, der angiver Differentialkvotientens Orden, lige, forekommer $2x+1$ kun i lige Potenser; er Ordenen derimod ulige, findes den samme Størrelse kun i ulige Potenser.

Bemærkes det dernæst, at Differentialkvotienterne af Størrelsen i sidste Parentes under Summationstegnet paa højre Side i (2):

$$\frac{1}{x^{n-r}} + \frac{(-1)^{n-r}}{(x+1)^{n-r}},$$

naar Differentialkvotientens Orden er lige, aabenbart kan skrives paa Formen

$$\frac{1}{x^{n-r+2p}} + (-1)^{n-r}\,\frac{1}{(x+1)^{n-r+2p}},$$

bortset fra en af x uafhængig Faktor, medens man, naar Differentialkvotientens Orden er ulige, paa tilsvarende Maade finder

$$\frac{1}{x^{n-r+2p+1}} - (-1)^{n-r+1}\,\frac{1}{x^{n-r+2p+1}},$$

Digitized by Google

kan vi, ifølge hvad vi lige har set, formulere følgende Sætning:

Dersom q er lige, kan

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(2s+1)^q}{s^m(s+1)^m}$$

under endelig Form udtrykkes ved reciproke Potenssummer af de naturlige Tal med udelukkende lige Eksponenter. Er q derimod ulige, vil Udtrykket kun indeholde Potenssummer med ulige Eksponenter. Pariteten af m er altsaa uden Betydning.

Rigtigheden af denne Sætning kan forøvrigt ogsaa indses saaledes. Det gælder aabenbart om at vise, at i Udviklingen af Brøken

$$\frac{(2x+1)^q}{x^m(x+1)^m} = \frac{A_m}{x^m} + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x} + \frac{B_m}{(x+1)^m} + \frac{B_{m-1}}{(x+1)^{m-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x+1}$$

er $A_p = (-1)^p B_p$, hvis q er lige, medens $A_p = (-1)^{p-1} B_p$, hvis q er ulige. Dette følger imidlertid af, at dersom x erstattes med $-x-1$, vil Brøken paa venstre Side af Lighedstegnet blive uforandret eller skifte Tegn, eftersom q er lige eller ulige, og dette maa derfor ogsaa være Tilfældet med den eentydig bstemte Dekompositionsudvikling paa højre Side af Lighedstegnet.

Danske Eksamensopgaver.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1919.

Deskriptiv Geometri.

Skraa Afbildning. XZ-Planen er Tegneplan: Y-Aksens Billede Y' danner en Vinkel paa 120^0 med X-Aksen, og Projektionsforholdet paa Y-Aksen er $\frac{1}{2}$.

1. En Terning tegnes i skraa Afbildning. Hjørnespidserne i den ene Sideflade betegnes i Rækkefølge a, b, c, d og de

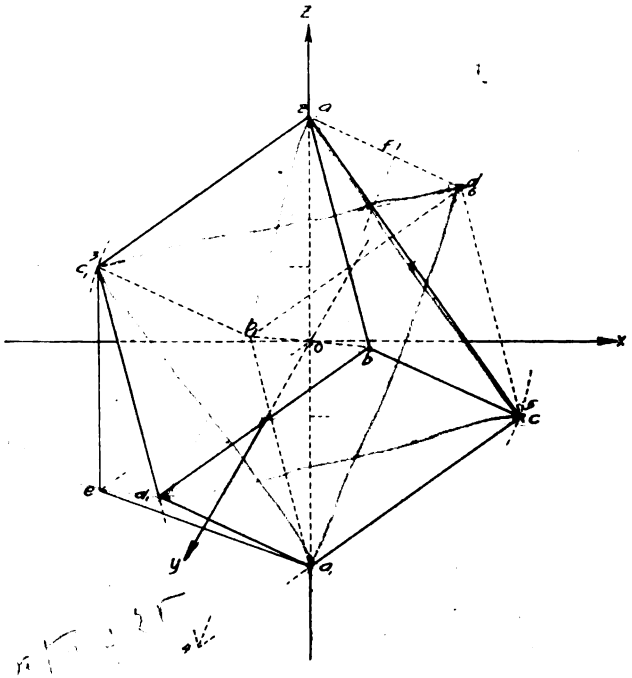
Digitized by Google

modstaaende Hjørnespidser henholdsvis a_1, b_1, c_1, d_1. a og a_1 skal ligge paa Z-Aksen i opgivne Punkter med ligestore Afstande fra Begyndelsespunktet. c og c_1 skal ligge i XZ-Planen saaledes, at c faar positiv X-Koordinat, og endelig skal b ligge foran XZ-Planen.

2. Konstruer Terningens Slagskygge paa XZ-Planen for en Lysretning parallel med Diagonalen bb_1, og angiv Lystallene paa Terningens Sideflader.

3. Bevis, at Terningen kan bringes til Dækning med sig selv ved en Drejning paa 120^0 om Diagonalen bb_1, og angiv, hvilke Kanter der derved bringes til Dækning. Vis, at de 6 Kanter, som ikke gaar gennem b eller b_1, er Frembringere paa samme Omdrejningshyperboloide med Aksen $2b_1$.

4. Konstruer det Punkt, hvori Billedet af Kanten ad rører den nævnte Hyperboloides Kontur i den skaa Afbildning.



Løsning:

1. Vinkelspidserne c og c_1 i Rektanglet aca_1c_1 bestemmes ved, at deres Projektioner paa aa_1 deler denne i 3 ligestore Dele. $bd_1 \equiv db_1 \equiv ac_1$ skærer Y-Aksens Projektion i Afstanden $\frac{1}{2}\, ae$ fra o. —

Digitized by Google

2. Skyggen e af den eneste Hjørnespids d_1, som kaster Skygge for Lysretningen bb_1, bestemmes ved $d_1e \perp bo$. Lystallene er $100\sqrt{\frac{1}{3}}$. — 3. bb_1 er vinkelret paa de ligesidede Trekanter acd_1 og a_1c_1d i deres Centrer, da $ba = bc = bd_1$ og $b_1a_1 = b_1c_1 = b_1d$. Disse Trekanter og dermed Terningen dækker derfor sig selv ved en Drejning paa 120^0 om bb_1. Kanterne ad, ca_1, d_1c_1 bringes herved til Dækning og ligger følgelig paa en Omdrejningshyperboloide med Aksen bb_1. Det samme gælder a_1d_1, c_1a, dc. De to Hyperboloider ere sammenfaldende, da f. Eks. ad skærer c_1a og dc og a parallel med a_1d_1. — 4. Hyperboloidens Kontur er en Ellipse, som rører Billederne af Hyperboloidens Frembringere. Det Punkt, 1, hvori Ellipsen rører ad's Billede, findes ved at anvende Brianchons Sætning paa Sekskanten 1 2 3 4 5 6. — Figuren er taget fra en Eksamenstegning.

Matematik I.

1. Find den mindste Værdi, som Funktionen

$$z = \frac{x^2y^2}{(x-1)(y-2)}$$

antager i den ved Uligheden

$$x > 1, y > 2$$

bestemte Kvartplan af XY-Planen.

2. Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^x + 2\sin x.$$

3. Funktionen

$$y = x^3 \quad (-\pi < x < \pi)$$

udvikles i en Sinusrække. Angiv derefter Rækkens Sum for enhver Værdi af x (i eller udenfor Intervallet).

Løsninger:

1. Ligningerne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{y-2} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{x-1} \cdot \frac{y(y-4)}{(y-2)^2} = 0$$

har indenfor Kvartplanen $x > 1$, $y > 2$ en og kun een Løsning, nemlig $(x, y) = (2, 4)$. I dette Punkt $(2, 4)$ antager z sin mindste Værdi $z = 32$, hvad man let slutter deraf, at $z \to +\infty$, baade naar Punktet (x, y) nærmer sig til et Punkt paa en af Randene $x = 1$ og $y = 2$, og naar Punktet (x, y) fjerner sig bort i det Uendelige

Digitized by Google

indenfor Kvartplanen. — At Punktet $(2, 4)$ er et Minimumspunkt, fremgaar ogsaa af en direkte Beregning af de partielle Afledede af 2den Orden, der giver $r = 16$, $s = 0$, $t = 4$, altsaa $r > 0$, $t > 0$ og $rt - s^2 > 0$.

2. Ved Prøve findes et partikulært Integral af Formen $y = ae^x + b \sin x + c \cos x$, nemlig svarende til $(a, b, c) = (\frac{3}{7}, \frac{6}{13}, -\frac{4}{13})$. Idet Ligningen $r^2 + 2r + 4 = 0$ har Rødderne $r = -1 \pm i\sqrt{3}$ bliver det søgte fuldstændige Integral

$$y = \tfrac{3}{7}e^x + \tfrac{6}{13}\sin x - \tfrac{4}{13}\cos x + e^{-x}(c_1 \cos x\sqrt{3} + c_2 \sin x\sqrt{3}).$$

3. Idet Funktionen x^3 er ulige, kan den udvikles i en Sinusrække

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots, \qquad (-\pi < x < \pi)$$

hvori Koefficienterne er bestemt ved

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\,dx,$$

hvoraf findes (ved delvis Integration)

$$b_n = (-1)^n \frac{2}{n}\left(\frac{6}{n^2} - \pi^2\right).$$

For et x beliggende i Intervallet $(2p - 1)\pi < x < (2p + 1)\pi$ har Rækken Summen $(x - 2p\pi)^3$, og for $x = (2p + 1)\pi$ har Rækken Summen

$$\tfrac{1}{2}\{f(-\pi +) + f(\pi -)\} = 0.$$

Matematik II.

1. Find Volumen af den Del af Fladen

$$4x^2 + 12y^2 + 6z^2 = 25$$

begrænsede Legeme, der ligger indenfor Cylinderfladen

$$4x^2 + 12y^2 = 1.$$

2. En Kurve er givet i polære Koordinater (r, θ) ved Ligningen $r \cdot \theta = 1$ $(0 < \theta < \infty)$. Tegn Kurven. Find dernæst Længden af det Kurvestykke PQ, der begrænses af de to til henholdsvis $\theta = 1$ og $\theta = 5$ svarende Punkter P og Q. Find sluttelig de polære Koordinater til det til Punktet P svarende Krumningscentrum.

Løsninger:

1. Ellipsoiden og Cylinderfladen skærer hinanden i to Ellipser, beliggende henholdsvis i Planerne $z = 2$ og $z = -2$. Voluminet af den over xy-Planen liggende Del (Halvdelen) af Legemet er Sum-

Digitized by Google

men af Volumen af en Cylinder med Højde 2 og Grundfladeareal $\pi \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} = \pi \frac{\sqrt{3}}{12}$ og Volumen af et Ellipsoidesegment

$$\int_2^{\sqrt{6}} \pi \sqrt{\tfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{12}} (25 - 6z^2)\, dz = \tfrac{125}{36} \pi \sqrt{2} - \tfrac{1}{6}^7 \pi \sqrt{3}.$$

Det søgte Volumen bliver altsaa

$$2\left\{2\pi \frac{\sqrt{3}}{12} + \tfrac{125}{36} \pi \sqrt{2} - \tfrac{1}{6}^7 \pi \sqrt{3}\right\} = \tfrac{125}{18} \pi \sqrt{2} - \tfrac{16}{3} \pi \sqrt{3}.$$

2. Kurven er en hyperbolsk Spiral. Længden l af det omtalte Kurvestykke er bestemt ved

$$l = \int_1^5 \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_1^5 \theta^{-2} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta.$$

Vi finder ved delvis Integration

$$\int \theta^{-2} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta = -\sqrt{1 + \theta^2} \cdot \theta^{-1} + \int \theta^{-1} \tfrac{1}{2} \frac{2\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta =$$

$$-\frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \theta^2} + l \cdot (\theta + \sqrt{1 + \theta^2}),$$

altsaa

$$l = -\tfrac{1}{5} \sqrt{26} + \sqrt{2} + l \cdot (5 + \sqrt{26}) - l \cdot (1 + \sqrt{2}).$$

Ved kendte Formler findes i retvinklede Koordinater for Kurven $x = \theta^{-1} \cos \theta$, $y = \theta^{-1} \sin \theta$ i Punktet $\theta = 1$ Krumningscentrets Koordinater

$$x = 2 \sin 1 - \cos 1,\ y = -2 \cos 1 - \sin 1,$$

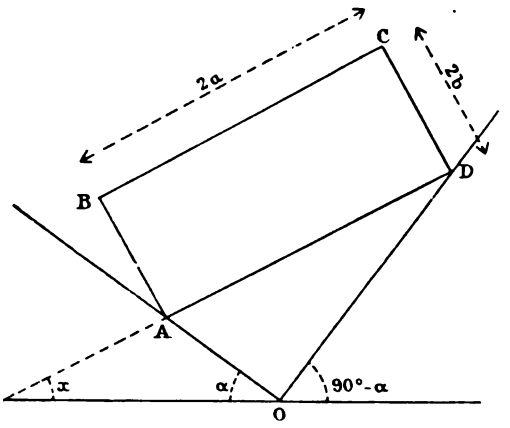
hvoraf følger i polære Koordinater

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5},\ \theta = arctg \frac{y}{x} = \frac{63{,}5}{180} \pi + 1 + \pi = \text{ca. } \frac{5}{3} \pi.$$

Rationel Mekanik.

1. En tung hemogen rektangulær Plade $ABCD$ støtter sig med sine to Vinkelspidser A og D til to paa hinanden vinkel-

Digitized by Google

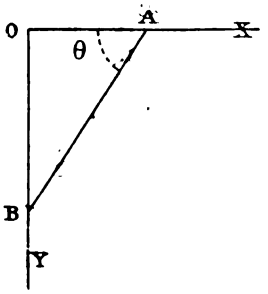


rette glatte Skraaplaner, hvis Heldningsvinkler er α og $90^0 - \alpha$. Rektanglet ligger i en lodret Plan, der staar vinkelret paa Skraaplanernes fælles vandrette Kant. $AD = 2a$; $AB = 2b$.

Find den Vinkel x, som Siden AD i Rektanglets Ligevægtsstilling danner med Horizonten. (Simplest finder man $tg\,x$).

Er Ligevægtsstillingen stabil?

2. En vægtløs Stang AB af Længden a forbinder to tunge Partikler, begge med Massen m anbragte i Stangens Endepunkter A og B. Punktet A er bundet til at bevæge sig paa en glat vandret Linie OX og Punktet B paa en glat lodret Linie OY. Stangen danner i et vilkaarligt Øjeblik Vinklen θ med OX, og for $t = 0$ har man givet



$$\theta = \alpha, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Man skal finde $\frac{d\theta}{dt}$ som Funktion af θ og angive Længden af det matematiske Pendul, der har samme Svingningstid som Stangen.

Dernæst skal man finde Hastighed og Akceleration for Punktet A samt Spændingen af Stangen i et vilkaarligt Øjeblik som Funktioner af θ.

Løsninger:

1. Opgaven løses let ved at tage Momentet om Aksen D; dog lettest ved at bemærke, at Tyngdepunktet (ξ, η) for Pladen i en Ligevægtsstilling maa ligge højest eller lavest. Figuren gives

$$\eta = 2a \cos(\alpha + x) \sin\alpha + a \sin x + b \cos x,$$

hvoraf

Digitized by Google

$$\frac{d\eta}{dx} = -2a\sin(\alpha + x)\sin\alpha + a\cos x - b\sin x = 0,$$

der giver

$$tg\,x = \frac{2a\cos^2\alpha - a}{2a\cos\alpha\sin\alpha + b} = \frac{a\cos 2\alpha}{a\sin 2\alpha + b}.$$

Stillingen maa være instabil, da Banen for Tyngdepunktet ved en Bevægelse i Overensstemmelse med Betingelserne er en Ellipse med Centrum i Skæringslinien mellem Skraaplanerne.

2. Man har efter Figuren

$$x = OA = a\cos\theta,\ y = OB = a\sin\theta.$$

Den levende Krafts Sætning giver

$$\tfrac{1}{2}m\,x'^2 + \tfrac{1}{2}my'^2 = mg(\sin\theta - \sin\alpha),$$

hvoraf ved Indsættelse

$$a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2ag(\sin\theta - \sin\alpha).$$

Stangen svinger altsaa som et Pendul af Længden $\frac{a}{2}$.

Man finder

$$x' = -a\sin\theta\cdot\theta' = -a\sin\theta\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\sin\theta - \sin\alpha}$$

$$x'' = -a\sin\theta\cdot\theta'' - \cos\theta\cdot\theta'^2 = -g(3\cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\alpha),$$

idet

$$\theta'' = \frac{g}{a}\cos\theta.$$

Spændingen T finder man af

$$mx'' = T\cos\theta,$$

der giver

$$T = mg(3\sin\theta - 2\sin\alpha).$$

Samme Resultat vil man finde af

$$my'' = mg - T.$$

Digitized by Google

Opgaver til Løsning.

3. Skriv Tallet 1 som en Sum af indbyrdes forskellige Stambrøker med ulige Nævnere og paavis, at der mindst maa findes 9 Brøker.

K. Løchte Jensen.

4. Polynomiet

$$\frac{(x-1)^n \cdot x^p}{p} + \sum_{q=0}^{q=n-1} (-1)^{q+1} \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-q)}{p(p+1)\cdots(p+q+1)} (x-1)^{n-q-1} x^{p+q-1} + (-1)^{n+1} \frac{n(n-1)\cdots 1}{p(p+1)\cdots(p+n)},$$

hvor n og p er positive hele Tal, skal ordnes efter faldende Potenser af x. Bevis, at Polynomiet har et $(n+1)$-dobbelt Nulpunnkt, medens Resten af Nulpunkterne er simple.

5. Man skal bevise Rigtigheden af følgende Udviklinger:

$$\frac{\pi-2}{16} = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 11\cdot 13} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5}$$

$$\frac{4-\pi}{64} = \frac{1}{1^2\cdot 3\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7\cdot 9^2} + \frac{1}{9^2\cdot 11\cdot 13^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5}$$

G. M. Stensig.

Matematisk Forening

har i Foreningsaaret 1918—19, ladet afholde følgende Foredrag:

$^{26}/_{9}$ 18 Cand. mag. A. F. Andersen: Cesàro's Summabilitetsmetode (1. Halvdel).

$^{10}/_{10}$ 18 Cand. mag. A. F. Andersen: Cesàro's Summabilitetsmetode (2. Halvdel).

$^{21}/_{11}$ 18 Professor, Dr. phil. C. Juel: Om D'Alembert og D'Alembert's Princip.

$^{28}/_{11}$ 18 Professor, Dr. phil. Johs. Mollerup: De Fourierske Rækkers Summabilitetsteori.

$^{12}/_{12}$ 18 Professor, Dr. phil. H. Bohr: De Dirichlet'ske Rækkers Summabilitetsteori.

$^{29}/_{1}$ 19 Professor, Dr. phil. H. Bohr: Om konform Afbildning (en infinitesimalgeometrisk Undersøgelse).

Digitized by Google

$^{20}/_{2}$ 19 Professor, Dr. phil. & math. H. G. Zeuthen: Forklaring af et tilsyneladende Paradoks i den tællende Geometri.
Derefter festlig Sammenkomst med Prof. Zeuthen i Anledning af hans 80-aarige Fødselsdag.

$^{13}/_{3}$ 19 Professor, Dr. phil. Johs. Mollerup: Om visse Integraler analoge med det Dirichlet'ske.

$^{27}/_{3}$ 19 Dr. phil. J. Steffensen: Om visse Uligheder og Tilnærmelsesmetoder.

$^{24}/_{4}$ 19 Professor, Dr. phil. N. E. Nørlund: Om Bernoulli'ske Funktioner.

$^{8}/_{5}$ 19 Professor, Dr. phil. H. Bohr: En Sætning af Kronecker om Diofantiske Approximationer.
Derefter Generalforsamling.

$^{14}/_{5}$ 19 Dr. Julius Pàl (Ungarn): Fouriersche Reihen und Jordan'sche Kurven (1. Halvdel).

$^{27}/_{5}$ 19 Dr. Julius Pál: Fourier'sche Reihen und Jordan'sche Kurven (2. Halvdel).

Bøger tilsendte Redaktionen.

Annuaire pour l'an 1919 publié par Le bureau des longitudes. (Paris, Gauthier-Villars et Cie). — Indeholder foruden det kendte Tabelværk: P. Appell, Figures d'equilibre relatif d'un liquide homogène en rotation, dont les cléments s'attirent suivant la loi de Newton. Maurice Hamy. La détermination interférentielle des diamétres des astres.

Emanuel Czuber, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band. Vierte Auflage 1919 (Leipzig—Berlin. B. G. Teubner) 600 S. Af nyt Stof nævnes Arealsætninger om Fodpunkts- og Hjulkurver. Anvendelse af mekanisk Kvadratur og Kubatur, Tyngdepunkts- og Momentbestemmelser, grafisk Integration, grafisk Løsning af Differentialligninger af 1. Orden, Systemer af Differentialligninger.

Emil Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Zweiter Band. Erster Heft. Zweite Auflage. 1904. (Leipzig—Berlin. B. G. Teubner). 130 S.

Gerhard Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Zweite, verbesserte Auflage. 1619. (B. G. Teubner). 416 S.

C. Runge: Graphische Methoden. Zweite Auflage. 1919. (B. G. Teubner). 130 S.

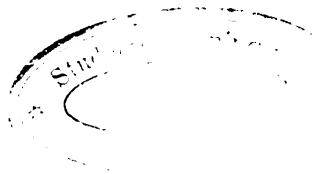
R. Rothe: Darstellende Geometrie des Geländes. Zweite verbesserte Auflage. 1919. (Math.-phys. Bibliothek 35 36. B. G. Teubner). 92 S.

Digitized by Google

Theodor Schmid: Darstellende Geometrie. Zweite Auflage. (Sammlung Schubert LXV). Vereinigung Wissenschaftliger Verleger. Walter de Gruyter & Co.). 278 S. Pris indb. 15,40 Mk.

Rettelse.

S. 32. I Rækkerne 9) og 10) summeres fra $\nu = -\infty$, ikke fra $\nu = 1$.



Digitized by Google

MATEMATISK TIDSSKRIFT

B

UDGIVET AF

MATEMATISK FORENING I KØBENHAVN

REDIGERET AF

HARALD BOHR **T. BONNESEN**

AARGANG 1920

Udgået af Studenterforeningens Bibliotek

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: JUL. GJELLERUPS FORLAG
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)
1920

Digitized by Google

Digitized by Google

INDHOLD.

Side

Birch, H. A., exam. polyt.: Se løste Opgaver.
Bonnesen, T., Dr. phil., Prof. ved polyt. Læreanstalt:
Antik og moderne Irrationalitetsteori 2
— Tilføjelse til ovenstaaende 55
— Beviser for nogle Sætninger om konvekse Kurver 47
— Litteraturanmeldelse.
Bohr, H., Dr. phil., Prof. ved polyt. Læreanstalt: Et Eksempel paa en Bevismetode 46
Crone, C., Dr. phil., Docent ved Landbohøjskolen: Geometrisk Integration af en Differentialligning 15
Erlang, A. K., cand. mag., Videnskabelig Medarbejder ved Københavns Telefonselskab: Telefonventetider 25
Johansen, K. V., stud. polyt.: Se Opgaver til Løsning.
Kramers, H. O., Dr. phil., Assistent ved Instituttet for teoretisk Fysik: Litteraturanmeldelse.
Nielsen, Niels, Dr. phil., Prof. ved Universitetet: Bemærkninger om Irrationalitetsteorien 1
Sørensen, S. P., Adjunkt: Se løste Opgaver.

LØSTE OPGAVER.

1893 Nr. 32. 1919 Nr. 5 42

OPGAVER TIL LØSNING.

Nr. 6. K. V. Johansen 70

EKSAMENSOPGAVER.

Skoleembedseksamen 20, 59
1. Del af polyteknisk Eksamen 19, 67

LITTERATURANMELDELSER.

Bonola, Roberto: Die nichteuklidische Geometri (T. Bonnesen) 56
Oseen, C. W.: Atomistiska Föreställninger i Nutidens Fysik (H. A. Kramers) 57

Bøger tilsendt Redaktionen 24, 70

Digitized by Google

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

Bemærkninger om Irrationalitetsteorien.

Af Niels Nielsen.

Skønt Professor *Zeuthens* aabne Brev maaske nok kunde opfordre til et udførligere Gensvar, vil enhver dog sikkert forstaa, at jeg paa Grund af Professor *Zeuthens* Død indskrænker mig til et Par orienterende Bemærkninger.

Det har længe været kendt[1]), at Euklid i sine Elementers femte Bog har givet en Definition for irrationale Tal, lige saa nøjagtig og koncis som Nutidens, enten man saa med Dedekind anvender det saakaldte Snit som Definition, eller man følger Cantor og f. Eks. indfører to Talfølger

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$
$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, \cdots,$$

hvis Elementer opfylder Betingelserne

$$\beta_0 > \alpha_0, \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n},$$

og, idet Ligheden gælder det ene Sted,

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1}, \quad \beta_n \geqq \beta_{n+1}.$$

Derfor plejer jeg i mine Forelæsninger at betegne et Tals Definition ved Hjælp af de ovennævnte Talfølger som Euklids Eksistensbevis, skønt denne Definition ikke formelt falder sammen med hans.

---

[1]) O. Stolz: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. I, p. 26; Leipzig 1886.
R. Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? p. XIV; Braunschweig 1887; zweite unveränderte Auflage 1893.
U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp, p. 5; Leipzig 1892.

Digitized by Google

Men et er at give de irrationale Tals **Definition**, et andet at udvikle en **Irrationalitetsteori,** hvoraf der næppe findes Spor i den ældre Litteratur, saaledes at det forbeholdtes Weierstrass, Dedekind og Cantor at udvikle denne Teori. Og først, da dette var gjort, forstod man den fulde Betydning af Euklids Definition.

I sit første Skrift om Irrationalitetsteorien siger Dedekind[1], at Sætninger som f. Eks. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$, saa vidt han ved, endnu intet Steds findes virkelig bevist. Dermed mener han altsaa, at der ikke før er givet nogen Teori for Regning med irrationale Tal, altsaa en Irrationalitetsteori.

Da man foreholdt Dedekind, at andre Forfattere, f. Eks. Bertrand, skulde have have haft en Irrationalitetsteori før ham, svarede han[2], at det irrationale Tals Definition var Matematikernes Fælleseje, fordi den allerede fandtes hos Euklid, og han slutter med udtrykkelig at erklære, at han stadig opretholdt sin lige anførte Paastand om $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Der er nu forløbet en Menneskealder, siden Dedekind skrev sit Forord, og i den Tid er der, saa vidt jeg ved, ikke fremkommet nogetsomhelst, som rokker ved hans Paastand.

København, d. 25. Januar 1920.

Antik og moderne Irrationalitetsteori.

Af T. Bonnesen.

I Matematisk Tidsskrift (1919 B, S. 65) har *H. G. Zeuthen* skrevet et aabent Brev »om antik Brug af den moderne Irrationalitetstheoris Synsmaader«, som han slutter med at sige, at han har benyttet en Anledning til »at pege hen

[1]) Stetigkeit und irrationale Zahlen, p. 20; Braunschweig 1872; zweite unveränderte Auflage 1892.

[2]) Was sind und was sollen die Zahlen? p. XIV–XV.

Digitized by Google

paa de Sider af Udbyttet af min historiske Forskning, hvori jeg selv ser det vigtigste Bidrag, som jeg kan have ydet til vor Forstaaelse af Mathematikens Udviklingsgang fra dens første Oprindelse indtil dens nutidige Skikkelse.«

Nu, da *Zeuthen* er død, føler jeg, at han har efterladt os danske Matematikere en Arv, som forpligter os til grundigt at gennemtænke den græske Geometri, naar vi træder i Forbindelse med den.

For mig, der ved Undervisning til Faglærerindeeksamen aarlig gennemgaar Euklids 6 første Bøger, foreligger stadig Nødvendigheden af at uddybe dette Studium; og da jeg nu ved Samtaler med andre angaaende *Zeuthens* Brev, har truffet Anskuelser, som afviger fra mine egne, har jeg paany taget Irrationalitetsteorien op til Overvejelse. Herved har jeg faaet bekræftet min Opfattelse, som nøje stemmer med *Zeuthens* Fremstilling i Matematikens Historie, og som det forsaavidt kunde være unødvendigt at offentliggøre. Men der findes maaske dog Læsere af Tidsskriftet, som ikke har disse Ting paa rede Haand, og som, nu da Spørgsmaalet er kommet frem, har Lyst til at tage Problemerne op paa ny.

Eudoxos's Proportionslære, som er udviklet i *Euklids* V. Bog, er grundet paa det almindelige Størrelsesbegreb, hvis Omraade er karakteriseret ved de i Euklid I. fremsatte »Almindelige Begreber« (Thyra Eibes Oversættelse). Disse Begreber finder i første Række deres Anvendelse paa Liniestykker, plane Polygoner og Polyedre. Berettigelsen af denne Anvendelse hentes fra de Erfaringer, man har gjort med Tegneplanens virkelige Geometri, og Euklid postulerer Betydningen af sine idealiserede Figurer bl. a. ved at tillægge dem visse Størrelseegenskaber. Det bemærkes, at der i Følge Alm. Begr. 5, »Det hele er større end en Del af det,« i og for sig ikke er noget til Hinder for at sige, at en Polygon er større end et Liniestykke, som ligger i dets Indre. De Alm. Begreber giver derfor ikke tilstrækkelig Grundlag til en Maaling af disse Størrelser. I de første fire Bøger er der kun Tale om Figurers Ligestorhed, ikke om Maaling; denne indføres i V. Bog og kræver ny Definitioner. Def. 3: Forhold er en vis Storhedsrelation mellem to ensartede Størrelser. Def. 4: Størrelser siges at have et Forhold til hinanden, naar de ved at mangfoldiggøres kunne overgaa hinanden.

Digitized by Google

I Tegneplanen vilde en Flade meget vel kunne overdækkes med Linier, som tegnedes tilstrækkelig tæt paa hinanden, men I. Def. 2 »En Linie er Længde uden Bredde« idealiserer Linien saaledes, at denne Overdækning bliver umulig. Der bliver derfor kun Tale om Forhold mellem Liniestykker indbyrdes o. s. v.

Ligestorhed og Uligestorhed mellem Forhold defineres i V. Def. 5 og 7 saaledes: Forholdene $\frac{b}{a}$ og $\frac{b_1}{a_1}$ siges at være ligestore, dersom Relationerne $mb \gtrless na$ og $mb_1 \gtrless na_1$ finder Sted samtidig for alle hele Tal m og n. Men $\frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}$, dersom det er muligt at finde saadanne hele Tal m og n, at $mb > na$, men $mb_1 \leqq na_1$.

I disse Definitioner benyttes kun hele Tal. Tager vi Brøker til Hjælp, kan man sige, at et Forhold mellem to Størrelser vil være bestemt, dersom det er muligt ved Hjælp af dem at henvise enhver Brøk i en af to Grupper af Brøker, saaledes at enhver Brøk i den ene Gruppe er mindre end enhver Brøk i den anden. En saadan Inddeling kaldes et Snit.

I *Euklid* X. 5 vises, at »Sammaalelige Størrelser have et Forhold til hinanden som et Tal til et Tal,« og i 7, at »Usammaalelige Størrelser have ikke et Forhold til hinanden som et Tal til et Tal.« Her nævnes atter kun hele Tal, men ikke Brøker (5) eller irrationale Tal (7). *Euklid* bruger kun Betegnelsen Forhold. At »Forholdet« i alle Maader er ensbetydende med »Tallet« vil fremgaa af det følgende, og der er næppe Grund til at foretage en filosofisk Skælnen mellem de to Begreber saaledes som *Stolz* gør det (Algemeine Arithmetik I, S. 94): »In den auf uns gekommenen geometrischen Schriften des Alterthumes findet sich keine deutliche Spur der Ansicht, dass das Verhältniss zweier incommensurabelen Grössen eine Zahl sei.«

Definitionerne paa Forhold vilde ikke have nogen Betydning, hvis det f. Eks. viste sig, at alle Forhold var ligestore, men at dette ikke er Tilfældet fremgaar af Sætning V. 8, der viser, at $b_1 > b_2$ medfører $\frac{b_1}{a} > \frac{b_2}{a}$.

Heraf fremgaar tillige, at Ligningen $\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$ kun kan have 1

Digitized by Google

Løsning. Eksistensen af denne Løsning vises ikke i V., men først ved den geometriske Fjerdeproportionalkonstruktion i VI. 12. Alle Eksistensbeviser føres hos *Euklid* ad geometrisk Vej, og x er jo en geometrisk Størrelse, hvorfor det er nødvendigt først at udvikle Læren om Proportionernes Anvendelse i Geometrien i VI. Bog, inden Fjerdeproportionalens Eksistens kan paavises. VI. 12 lærer altsaa at multiplicere en Størrelse c med et Tal $\frac{b}{a}$.

Tillige kan man skaffe alle Forhold samme Nævner c og saaledes ordne dem efter Størrelse. Man maa dog lægge Mærke til, at vi her er kommet udenfor Størrelseslærens »Almindelige Begreber«. *Euklid* anvender ikke disse paa sine Forhold, men beviser udtrykkelig (V. 11, 13), at to ligestore Forhold samtidig er lig, større eller mindre end et tredje. Forholdet er altsaa en ny Tanketing (Tal), forskellig fra de geometriske Størrelser, som er hentet fra Anskuelsen. Man har her et Vidnesbyrd om, hvor dybt Oldtidens Matematikere var trængt ned i Analysen af Grundbegreberne.

Fra Definitionerne vender vi os nu til det afgørende Spørgsmaal, om der hos *Euklid* findes en Irrationalitetsteori, det vil sige en fuldt begrundet Lære om Regning med irrationale Tal.

Først Addition. I V. 24 findes en Sætning, som med vore Betegnelser lyder:

$$\text{Dersom } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \text{ og } \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}, \text{ vil } \frac{b_1 + c_1}{a_1} = \frac{b_2 + c_2}{a_2}.$$

Da man ved Hjælp af Fjerdeproportionalen kan skaffe alle Forhold samme Nævner (a_1 eller a_2), viser denne Sætning, at man af to Forhold $\frac{b_1}{a_1}$ og $\frac{c_1}{a_1}$ entydig kan bestemme et Forhold $\frac{b_1 + c_1}{a_1}$, som kan betegnes som deres Sum, og som *Euklid* betegner som Additionsforhold (V. Def. 14).

Multiplikation. Ogsaa denne Regningsart findes, men ikke udtrykt paa vor Maade. *Euklid* danner af to Forhold $\frac{c_1}{b_1}$ og $\frac{b_1}{a_1}$ et nyt Forhold $\frac{c_1}{a_1}$. Denne Operation, som vi kal-

Digitized by Google

der Multiplikation, kalder Euklid ligeligt Forhold (Def. 17). I Sætning 22 vises, at

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \text{ og } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \text{ medfører } \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}.$$

Altsaa Multiplikationen er entydig; og Multiplikationens kommutative Lov er udtrykt i 23:

$$\text{Naar } \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \text{ og } \frac{b_1}{a_1} = \frac{d_2}{c_2}, \text{ vil } \frac{c_1}{a_1} = \frac{d_2}{b_2}.$$

Den associative og den distributive Lov kan nu umiddelbart udledes, men findes ikke anført. Specielt bemærkes, at naar $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, er det ligelige Forhold

$$\frac{c}{a} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

$\frac{c}{a}$ betegner *Euklid* som det dobbelte Forhold af $\frac{b}{a}$.

De elementære Regningsarter er altsaa definerede og fuldt begrundede hos *Euklid*. Hvis man f. Eks. ved $\sqrt{2}$ forstaar Forholdet $\frac{b}{a}$ mellem Diagonal og Side i et Kvadrat, er baade $\sqrt{2}$ og $(\sqrt{2})^2$ defineret. Der opstaar nu det ny Spørgsmaal: Kan man finde Størrelsen af $(\sqrt{2})^2$?

Lad os paa Diagonalen b konstruere et nyt Kvadrat med Diagonalen c; da er

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{2},$$

hvilket faas af ligedannede Trekanter (VI. 4). $\frac{c}{a} = (\sqrt{2})^2$ ses straks af Figuren at være 2. Dette var nu en speciel Figur; for at komme til almindelige Sætninger om Kvadrater paa og Produkter af Forhold, benytter *Euklid* Arealer, idet han i VI. 19 og 23 beviser Sætningerne: »Ligedannede Trekanter have et dobbelt saa stort Forhold som de tilsvarende Sider. Ensvinklede Parallelogrammer have et Forhold til hinanden, som er sammensat af Sidernes.«

Heraf følger f. Eks. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Lad som før $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$, og lad d være den største, b den mindste Katete i en Tre-

Digitized by Google

kant med Vinklerne 60^0 og 30^0, d. v. s. $\frac{d}{b} = \sqrt{3}$. Da er

$$\frac{d}{a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3};$$

men i Følge Pytagoras er

$$\frac{\square d}{\square a} = 6 \text{ og i Følge VI. 23 er } \frac{\square d}{\square a} = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2.$$

Saadanne Eksempler paa Teoriens Anvendelse giver *Euklid* ikke. Men man maa erindre, at »Elementerne« ikke er bestemt til Lærebog for Begyndere, men for Tidens Matematikere, som var fortrolige med de Metoder, som skulde underbygges systematisk i Elementerne.

Resultatet af Undersøgelserne er da dette, at *Eudoxos*'s Proportionslære er en Irrationalitetsteori, som indeholder en Definition paa rationale Brøker og irrationale Tal, og som tillader at ordne dem efter Størrelse; den giver Definition paa de elementære Regningsarter og Begrundelse af de vigtigste Regneregler; Multiplikationsreglen for Kvadratrødder er en umiddelbar Følge af den. II. og VI. Bog giver i Forening Løsningen af den kvadratiske Ligning. I X. Bog behandles Størrelser, som er dobbelt irrationale ved Kvadratrod; og Volumenbestemmelserne i XII. Bog tillader Udvidelse til Kubikrod.

Som vi har set er Teorien hos *Euklid* fremsat i en saa abstrakt Form, som man paa nogen Maade kan ønske sig. Der gives aldrig en venlig pædagogisk Haandsrækning, ingen Oplysning om, hvad der ligger bagved. Det forudsættes, at Læseren er fuldt fortrolig med, at de geometriske Undersøgelser har ført til irrationale Tal; man kunde kalde disse en Slags løse Eksistenser, hvis Papirer nu formelt skal bringes i Orden. Angaaende Oprindelsen til Kendskabet til irrationale Størrelser kan henvises til forskellige Afhandlinger af *Zeuthen* f. Eks. »Sur l'origine de l'algèbre« (Vidsk. Selsk. Mat.-fys. Meddelelser II, 4, 1919). Her skal kun bemærkes, at man før Eudoxos Tid har benyttet Bestemmelsen (Antanairesis) af største Fællesmaal for to Liniestykker til Undersøgelsen af disses Forhold. Hvis denne Bestemmelse fører til en Periode, kan Processen aldrig sluttes, og Forholdet er derfor irrationalt. Simple Eksempler herpaa har man som bekendt i Forholdet mellem Kvadratets Diagonal og Side, eller mellem Tikantsiden og

Digitized by Google

Radius. Hertil svarer aritmetisk den periodiske Kædebrøksudvikling af de paagældende Kvadratrødder af rationale Tal. Vi ved, at man altid ved disse kommer til en Periode; og hvis man i Oldtiden havde holdt sig til dette Omraade, vilde Antanairesis altid kunne give fornøden Oplysning. Men man blev altsaa ikke staaende herved; *Eudoxos*'s Snit betegner et mægtigt Skridt fremad; med dette havde man paa engang faaet ethvert irrationalt Tal indeholdt i Definitionen.

Idet vi nu vender os til den moderne Irrationalitetsteori, som blev grundlagt omtrent samtidig af *G. Cantor*, *Dedekind* og *Weierstrass*, kan vi holde os til en enkelt af disse, idet der trods Forskelligheder i Fremstillingen findes væsentlig Overensstemmelse i Tankegangen. I *Dedekinds* »Stetigheit und irrationale Zahlen« (1872) er Hovedpunkterne følgende.

1. Grundlaget er Rækken af hele Tal, skabt gennem Erfaringen. Hovedegenskaben ved Talrækken er, at man altid kan tælle 1 frem. Ved Tælning dannes Addition og Multiplikation. De omvendte Regninger bringer Indførelsen af Brøker og negative Tal. Hermed er Omraadet R af rationale Tal skabt.

2. Falder R paa en eller anden Maade i to Klasser A_1 og A_2 saaledes, at ethvert Tal α_1 i A_1 er mindre end ethvert Tal α_2 i A_2, kaldes denne Inddeling et Snit i R. Et saadant Snit kan frembringes af et vilkaarligt rationalt Tal, som da enten vil være det største Tal i A_1 eller det mindste i A_2. Findes der intet største Tal i A_1 og intet mindste i A_2, skal der ved Snittet være defineret et irrationalt Tal. (De ved Uligheden $x^2 \lesseqgtr 2$, bestemte rationale, positive Tal frembringer f. Eks. et Snit $\sqrt{2}$). Snittene kan ordnes efter Størrelse. Herved er skabt Omraadet $\mathfrak{R}$ af reelle Tal.

3. $\mathfrak{R}$ er (i Modsætning til R) kontinuert. Betydningen heraf ligger i Sætningen: »Falder Systemet $\mathfrak{R}$ af alle reelle Tal i to Klasser $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ af den Natur, at ethvert Tal α_1 i Klassen $\mathfrak{A}_1$ er mindre end ethvert Tal α_2 i $\mathfrak{A}_2$, saa eksisterer der et og kun et Tal α, som kan frembringe denne Deling.« Den givne Deling frembringer nemlig ogsaa en Deling af de rationale Tal, R, hvorved der bestemmes et Snit, altsaa et rationalt eller irrationalt Tal α i $\mathfrak{R}$, og det kan vises, at dette netop har de forlangte Egenskaber.

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

Dedekind bemærker, at man i lange Tider forgæves har tænkt over Kontinuitetsbegrebet, inden han fandt denne Forklaring, og i Forordet til »Was sind und was sollen die Zahlen« (1887) siger han, at hans Teori naar sit Toppunkt i Beviset for $\mathfrak{R}$'s Kontinuitet.

4. Regnereglerne for rationale Tal gælder ogsaa for irrationale Tal. *Dedekind* angiver Metoder til at bevise dette og tilføjer: »Man kan saaledes naa til virkelige Beviser for Sætninger (som f. Eks. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), der saa vidt jeg ved hidtil aldrig er bevist.«

5. Grænsebegrebet indføres i $\mathfrak{R}$. Saaledes gælder Sætningen: »Vokser en Størrelse bestandig, men ikke over alle Grænser, saa nærmer den sig en Grænseværdi.« Denne Sætning er ækvivalent med Kontinuitetssætningen.

Lad os derefter foretage en Sammenligning mellem den antike og den moderne Teori Punkt for Punkt.

1—2. Bestemmelsen af de reelle Tal som Snit stemmer i det væsentlige overens. Aritmetiken maa dog først skabe Omraadet R af rationale Tal, inden der kan tales om Snit, medens Geometrien paa Basis af de hele Tal kan bestemme baade Brøker og de irrationale Tal. Den Forskel, som fremkommer ved at man i den ene Teori postulerer Eksistensen af et Tal, naar det er lykkedes at dele R i to Klasser, og i den anden postulerer et Forhold, naar det ved en eller anden Konstruktion er lykkedes et bestemme et Liniestykke ud fra et givet, er ikke væsentlig. Hvis man vil kunne anvende de reelle Tal i Geometrien (som Abscisser), maa man postulere Eksistensen af de tilsvarende Punkter. Oprindelig er man, som *Dedekind* fremhæver, kommet til de reelle Tal ad modsat Vej ved at postulere Punkters Bestemmelse ved Konstruktion.

Men efter at den matematiske Analyse havde naaet en rig Udvikling, særlig ved Anvendelse af Grænsebegrebet, som ogsaa Grækerne kendte, men anvendte med nogen Forsigtighed (smlgn. *Zeuthen*, Matematikens Historie), var det nødvendigt at grundlægge Irrationalitetsteorien forfra ad aritmetisk Vej, alene paa Basis af de hele Tal, uden Benyttelse af maalelige Størrelser. Formaalet med *Dedekinds* Teori er netop at undgaa disse.

Endnu kun et Par Ord om Spørgsmaalet, hvad de rette Linier, Planer o. s. v. er, som den euklidiske Geometri be-

Digitized by Google

handler. De virkelige, med praktiske Formaal forfærdigede Planer og rette Linier er i Besiddelse af forskellige Egenskaber, af hvilke man anser nogle for væsentlige, andre for mindre betydende. Idet man udelukkende tager de første i Betragtning og aldrig nævner de andre, kommer man til at operere med idealiserede Planer og Linier. Naar man i vore Dage vil karakterisere disse, sker dette igennem Aritmetiken. Planen er da Indbegrebet af alle reelle Talpar (x, y), den rette Linie Indbegrebet af alle de Talpar, som tilfredsstiller den lineære Ligning $ax + by + c = 0$ o. s. v. Man skelner saaledes mellem Virkelighedens Geometri og den aritmetiske Geometri.

4. Regningsarterne. Vi har set, at den euklidiske Teori ikke alene giver Definitioner paa irrationale Tal eller, om man vil, Kriterier paa Forholds Ligestorhed, men ogsaa fuldtud begrunder de elementære Regningsarter. Herved bliver der Brug for Fjerdeproportionalen, d. v. s. Konstruktion af en Størrelse, hvis Forhold til en given Størrelse er lig et givet Forhold. Den aritmetiske Teori, som kun betragter Tallene, har ingen Brug for en saadan Konstruktion. Denne bygger paa Læren om Kongruens, Paralleler og Forhold mellem plane Polygoner. Der benyttes saaledes et stort geometrisk Apparat til at stige ned i Tallæren. Men vil man omvendt fra Aritmetiken stige op til Planens Geometri, bliver Arbejdet heller ikke ringe. Endelig kunde det ogsaa bevises, at $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, ja, man kan maaske sige, at de dertil anvendte Sætninger kun er opstillede med dette Formaal for Øje. *Dedekinds* ovenfor citerede Paastand, at saadanne Sætninger, saa vidt han ved aldrig er bevist, rammer saaledes ikke den antike Proportionslære. Vi maa erkende, at de græske Matematikere har været fuldstændig klare over de matematiske Fordringer, som Opdagelsen af de irrationale Tal stillede til dem, naar de skulde opstille en Tallære, mod hvilken der ikke kunde rejses Indvendinger; og vi maa beundre det Skarpsind og den Opfindsomhed, hvormed Teorien er ført igennem. Alligevel kan man godt være enig med *Dedekind* i, at en aritmetisk Teori for de irrationale Tal skal opbygges uden Brug af maalelige Størrelser. Problemet stillede sig paa forskellig Maade i Oldtiden og i Nutiden, og Midlerne til dets Løsning maatte derfor ogsaa være forskellige. Men lad os se, hvad *Dedekind* selv udtaler i Forordet til »Was sind und was sollen die Zahlen.« *J. Tannery* havde i Forordet til sin »Introduction

Digitized by Google

i la théorie des fonctions d'une variable« (1886) citeret *Bertrand*'s Indførelse af Snit (Traité d'Aritmetique), og sagt, at man (Tannery) vel ikke kendte *Dedekinds* Teori, men at man maatte kunne gaa ud fra, at Udviklinger af samme Ide nødvendigvis maatte ligne hinanden. Det er denne Bemærkning, som foranlediger *Dedekind* til at sige:

»At et irrationalt Tal i Virkeligheden maa anses for fuldstændig bestemt ved den lige beskrevne Angivelse, denne Overbevisning har uden Tvivl ogsaa inden Hr. Bertrand været Fælleseje for alle Matematikere, som har beskæftiget sig med det irrationale Begreb; denne Bestemmelsesmaade foresvæver enhver Regner, som beregner en irrational Rod i en Ligning med Tilnærmelse; og naar man som Hr. Bertrand udelukkende gør det i sit Værk (for mig foreligger det ottende Oplag fra 1885), opfatter det irrationale Tal som Forhold mellem maalelige Størrelser, saa er denne Bestemmelsesmaade allerede paa det tydeligste udtalt i den berømte Definition, som Euklid (Elementer V., 5) opstiller paa Forholdenes Ligestorhed. Netop denne urgamle Overbevisning har nu ganske vist været Kilden til min Teori, ligesom til Hr. Bertrands og mange andres mer eller mindre gennemførte Forsøg paa at begrunde Indførelsen af de irrationale Tal i Aritmetiken. Men medens man indtil dette Punkt vil være fuldstændig enig med Hr. Tannery, maa man dog ved en virkelig Prøve straks bemærke, at Hr. Bertrands Fremstilling, i hvilken Snittets Tilsyneladelse ikke engang fremsættes i sin logiske Renhed, ikke har nogensomhelst Lighed med min, for saa vidt som den straks tager sin Tilflugt til Eksistensen af en maalelig Størrelse, hvad jeg af de ovenfor omtalte Grunde ganske forkaster; og bortset fra denne Omstændighed synes denne Fremstilling mig ogsaa i de efterfølgende, paa Antagelsen af denne Eksistens grundede Definitioner og Beviser, at frembyde saa væsentlige Huller, at jeg maa anse den i mit Skrift (§ 6) udtalte Paastand, at Sætningen $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ endnu intet Steds er strengt bevist, for berettiget, ogsaa med Henblik paa dette i mange andre Henseender fortræffelige Værk, som jeg ikke kendte den Gang.«

Man kan ikke af disse Ord se, om *Dedekind* har været fuldt fortrolig med Euklids V—VI. Bog (bortset fra Def. 5), og i saa Tilfælde forkaster Teorien, fordi den bygges paa Antagelsen om maalelige Størrelser. Men man faar med Bestemthed at vide, at han afviser en Teori, der som Bertrands be-

Digitized by Google

gynder aritmetisk, men griber til maalelige Størrelser for at komme igennem. Det faktiske Indhold af Euklids Elementer kan imidlertid ikke ændres af den ene eller den anden Anskuelse; og vi kan derfor rolig yde vor Beundring baade til Oldtidens Matematikere og til *Dedekind* og hans samtidige for de Irrationalitetsteorier, de har skabt.

3. 5. Kontinuet. Det tegnede Liniestykke, som for Øjet gør Indtryk af at være uafbrudt sammenhængende, kan gøres til Bærer af en tæt Punktmængde, og idet man postulerer Muligheden af fortsat Indskydning af et Punkt mellem to foreliggende, kommer man til Forestillingen om en »overalt tæt« Punktmængde. Denne Forestillng indeholder i sig Kimen til det Kontinuitetsbegreb, som *Dedekind* gør til Genstand for en Undersøgelse i »Stetigkeit und irr. Zahlen § 3«. Den ovenfor citerede Kontinuitetsætning er af fundamental Betydning for Analysen, og *Dedekind* var med Rette stolt af at have præciseret, hvad der skal forstaas ved Kontinuitet. En tilsvarende Sætning vil man næppe kunne finde i den gamle Matematik, og der kunde vel heller ikke være Trang til den. Den fortsatte Konstruktion, ligegyldig af hvad Art, vilde føre til ny Liniestykker, og Undersøgelsen af disses Forhold kunde altid tænkes at ske paa Basis af Snittet, saa at der ikke kunde være Frygt for at denne Vej at naa til andre Tal end Snit. Naar man derimod aritmetisk først skaber hele Tal, saa Brøker og derefter irrationale Tal ved Snit i de rationale, er det paakrævet at undersøge, hvad Snit i den ny Talklasse kan føre til. Først derved bliver den almindelige Grænseovergang mulig.

Til Indførelsen af ny Tal svarer geometrisk Indførelse af ny Punkter paa den rette Linie, idet man efterhaanden postulerer Eksistensen af Liniens Skæringspunkter med visse geometriske Steder. Skæring med Cirkler er saaledes ensbetydende med Indførelse af Kvadratrødder. Den, som gennem Anskuelsen kommer til Forestillingen om den kontinuerte Linie, maa da for at forklare, hvad han forstaar derved, støtte sig til Skæringspostulater.

Ligesom man ved Betragtningen af et Liniestykke er tilbøjelig til at identificere dette med Mængden af »alle« dets Punkter, er man efter at have angivet Principperne til Konstruktion af reelle Tal fristet til at tage Mængden af »alle« reelle Tal som en vel defineret Mængde. I *Dedekinds* Kontinuitetssætning synes der at ligge Forestillingen om en saadan paa

Digitized by Google

Forhaand tilvejebragt Mængde, og den samme Opfattelse kommer frem i *Cantors* Sætning, at Kontinuet ikke er en tællelig Mængde.

Efter min Mening er der Grund til at være forsigtig med en saadan Sammenfatning, som sker ved Brugen af Ordet »alle« i Matematik. Dersom en Sætning siges at gælde for alle hele Tal i den Forstand, at den gælder om ethvert enkelt helt Tal, man maatte nævne, giver »alle« ikke Anledning til Misforstaaelse; men dette kan blive Tilfældet, hvis man med »alle« har Forestillingen om Mængden af reelle Tal som et færdigt foreliggende Begreb.

»Den uendelige Talrække« er Betegnelsen for det Princip, hvorefter man til en foreliggende (endelig) Talmængde bestandig kan tilføje et nyt Tal. Efter de hele Tal indføres Brøker efter visse formelle Regler, der ogsaa bestandig tillader at føje en ny Brøk til de forhaandenværende; der angives Regneregler og et Princip til at ordne de rationale Tal efter Størrelse og det saaledes, at man kan skaffe Tal med vilkaarlig lille Differens. Fremskaffes Brøkerne i følgende Orden

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{1}\left(\frac{2}{2}\right),\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdot$$

det vil sige efter Størrelsen af Summen af Tæller og Nævner, kan man være sikker paa ved Fortsættelse at komme til enhver Brøk, som maatte ønskes. Enhver Brøk faar derved et bestemt Numer i Rækken, og det er dette man udtrykker ved at sige, at de rationale Tal danner en tællelig Mængde. Idet Brøkerne kun kan frembringes efterhaanden og i endeligt Antal vil de i og for sig altid derved blive numererede. Det afgørende ved den ovenstaaende Ordning er, at den metodisk bestemmer Brøkernes Plads.

Efter de rationale Tal kan efterhaanden indføres irrationale Tal enten enkeltvis som π eller klassevis som f. Eks. de algebraiske Tal, der er Rødder i algebraiske Ligninger med hele Koefficienter. De algebraiske Tal kan ogsaa ordnes som en tællelig Mængde. Udtrykket Talklasse betegner her en Metode, hvorefter man bestandig kan bestemme et nyt Tal. Om Metoden virkelig giver et Tal, afgøres ved Snitdefinitionen, men denne skaber ikke Tallene. Man kan derfor ikke tale om »alle« de ved Snit definerede Tal. Definitionen paa et Snit begynder med de Ord »Falder de rationale Tal i to Klasser ···«; men det gør de ikke af sig selv; vi maa selv foretage Delingen.

Digitized by Google

Blandt de Metoder, som kan tjene til Dannelse af ny Ta ud fra givne Tal, vil vi nævne følgende.

Lad der være angivet et Princip, hvorved man af en endelig Talmængde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ kan danne endnu et Ta α_{n+1}; det er da (paa mange Maader) muligt at bestemme et Tal, som ikke kan fremkomme ved det givne Princip.

Lad Tallene $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ være skrevet paa Kædebrøksform

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots)$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man kan da f. Eks. danne Kædebrøken

$$\beta = (a_{11} + 1, a_{22} + 1, a_{33} + 1, \cdots),$$

hvis ufuldstændige Kvotienter bestemmes efterhaanden som man skrider frem i Rækken α, og som bestemmer et Tal, der sikkert er forskelligt fra ethvert α.

Det er denne Metode, som *Cantor* benytter til Bevis for at Kontinuet ikke er en tællelig Mængde. Ræsonnementet er dette. Lad os antage, at Mængden af alle reelle Tal er tællelig. Den kan da ordnes som Rækken $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$. Det reelle Tal β findes imidlertid ikke i Rækken α, hvilket strider imod Antagelsen om, at denne Række indeholder alle reelle Tal. Antagelsen er følgelig gal. Kontinuet er ikke tælleligt.

Beviset bygger, som man ser, paa den Forestilling, at man har Mængden af »alle reelle« Tal til Disposition som et færdigt, afsluttet Hele. Dette er ikke Tilfældet; Matematiken angiver kun Metoder til Udvidelse af de Talmængder, man har skaffet sig. Ræsonnementet giver os derfor ikke nogen Oplysning om »alle« Tal i Kontinuet; det lærer os intet ud over, hvad der er sagt i Sætningen ovenfor, en Sætning, som i og for sig ikke er overraskende. Men Metoden, hvorefter β dannes, er saare simpel. I den her brugte Betydning er Ordet »alle« en Tilsmigelse, hentet fra de endelige Antal.

Indholdet af *Dedekinds* Kontinuitetssætning er derefter dette:

Lad der efter Bestemmelsen af rationale Tal være defineret visse Klasser (Frembringelsesmaader) af irrationale Tal (Snit i de rationale Tal), og lad der være givet en Metode, hvorefter

Digitized by Google

ethvert af de saaledes bestemte Tal kan henvises til en af to Grupper A_1 og A_2 saaledes, at ethvert Tal i A_1 er mindre end ethvert Tal i A_2. Da er der ved denne Deling bestemt et Tal, som er et Snit i de rationale Tal.

Paa deres store Opdagelsesrejse kom Oldtidens Matematikere til en Egn, hvor de havde Følelsen af at bevæge sig paa Hængedynd. De besluttede da at slaa Bro derover. De byggede en Bro af Træ. Den viste sig at være saa solid, at de uden Frygt kunde rejse videre, og enhver, der saa den, maatte beundre dens ubrudte Sammenhæng. »Lige laa den mellem sine Punkter«. Intet Hul var noget Steds at øjne. Aarhundreder senere kom Menneskene fra den modsatte Side til den samme Egn. De fandt endnu den gamle Bro vel bevaret. Men de frygtede, at den hverken kunde rumme eller bære alle de Maskiner, som en moderne Ekspedition fører med sig. De byggede da en Jærnkonstruktion, som svarede til deres Formaal, og som kunde tage den ny Tids Trafik. Men for Beskueren er Broen ikke som den gamle. Overalt ser man store Huller i Netværket. Disse giver dog ingen Grund til Frygt, thi Broens Bæreevne er sikret. Overalt er der stadig Plads til at indføre ny Konstruktioner, til store Bjælker og til det fineste Spindelvæv. Broen kan bære det alt.

Geometrisk Integration af en Differentialligning.

Af C. Crone.

Differentialligningen

$$(ay + bx)\frac{dy}{dx} + cx = 0,$$

hvortil Ligningen

$$(kx + my + n)\frac{dy}{dx} + px + qy + r = 0$$

kan reduceres, er integreret ved

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}l(ay^2 + byx + cx^2) + \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2ay + bx}{x\sqrt{4ac - b^2}} = C.$$

Dette Resultat, der let findes ved Lærebøgernes sædvanlige Metoder, kan faas ved en simpel geometrisk Betragtning.

Differentialligningen, skrevet paa Formen

$$a\frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + b\frac{dy}{dx} + c = 0,$$

viser, at ved en vilkaarlig af de Kurver, som den fremstiller, naar x og y betragtes som retvinklede Koordinater, vil de uendelig fjerne Punkter paa en Tangent og paa Radius vektor til Berøringspunktet danne projektive Rækker, hvis Fællespunkters Retningskoefficienter α_1 og α_2 er Rødder i Ligningen:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

En af Værdierne for det konstante Dobbeltforhold

$$\left(\frac{dy}{dx}, \frac{y}{x}, \alpha_1, \alpha_2\right) \quad \text{er} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Anvendes den lineære Transformation

$$\eta + i\xi = y - \alpha_1 x, \qquad \eta - i\xi = y - \alpha_2 x,$$

der giver

$$a(\eta^2 + \xi^2) = ay^2 + bxy + cx^2,$$

vil, naar ξ og η betragtes som retvinklede Koordinater (hvorved α_1 og α_2 forudsættes imaginære), Vinklen mellem Radius vektor og Tangent være konstant

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{b}.$$

Kurverne vil altsaa blive logaritmiske Spiraler med Ligningen

$$\tfrac{1}{2}l(\xi^2 + \eta^2) = \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arg\,tg} \frac{\eta}{\xi} + C.$$

Transformeres tilbage, faar man det ovenfor angivne Integral af Differentialligningen.

Den geometriske Tydning forudsætter, at a, b, c og x, y, ξ, η er reelle, samt at $b^2 < 4ac$. Men da det

Digitized by Google

fundne Integral under disse Betingelser gør Differentialligningen identisk, maa det altid gøre det. Vil man for a, b, c reelle og $b^2 > 4ac$ have Integralet paa reel Form, kan man ombytte arc tg med en Logaritme, hvorved faas

$$(y - \alpha_1 x)^{\sqrt{b^2-4ac}+b}(y - \alpha_2 x)^{\sqrt{b^2-4ac}-b} = C.$$

For $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{b}$ rational bliver Kurverne algebraiske. Vil man afgøre, om de kan blive Keglesnit, maa man erindre, at $\frac{y}{x}$ og $\frac{dy}{dx}$ bestemmer hinanden entydigt, saa at Tangenterne i en Kurves Skæringspunkter med en Linie gennem Begyndelsespunktet O — hvis der er mere end et Skæringspunkt — maa være parallele og være de eneste Tangenter i den Retning; er der kun 1 Skæringspunkt, maa Tangenten deri svare (1 — 1)-tydigt til dens Skæringspunkt med den uendelig fjerne rette Linie, hvilken sidste altsaa maa tangere Kurven. De ved Differentialligningen bestemte Kurver kan følgelig blive Keglesnit med Centrum i O og de ved

$$ay^2 + byx + cx^2 = 0$$

fremstillede Linier l_1 og l_2 til Asymptoter, i hvilket Tilfælde de projektive Punktrækker paa den uendelig fjerne rette Linie danne Involution, hvilket kræver $b = 0$. Eller Kurverne kunne være Parabler gennem O med l_1 og l_2 til Tangent i O og Diameter derigennem, nemlig i Tilfældet

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{b} = \frac{1}{3}.$$

Den geometriske Betragtning kan ikke bruges, hvis der ikke fremkommer to virkelige projektive Punktrækker paa den uendelig fjerne rette Linie; men da maa man have $a = 0$ eller $c = 0$. $\frac{y}{x}$ og $\frac{dy}{dx}$ er da konstante. Betragtningen er ogsaa uanvendelig, naar $b^2 = ac$, altsaa, naar Fælleselementerne og ligesaa Linierne l_1 og l_2 falde sammen. Anvendes en Koordinattransformation, der fører y-Aksen hen i l_1, maa den projektive Sammenhæng i de ny Koordinater (ξ, η) være udtrykt ved

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{\eta}{\xi} = k.$$

Digitized by Google

Integralet bliver

$$\eta = -k\xi \cdot l\xi + C\xi$$

eller

$$y + k(y - \alpha_1 x) \cdot l(y - \alpha_1 x) = C(y - \alpha_1 x),$$

der tilfredsstiller den forelagte Differentialligning for $k = 1$.

Klein og *Lie* har i deres Undersøgelser af kontinuerlige projektive Transformationsgrupper beskæftiget sig med de saakaldte W-kurver, der kunne defineres som Integralkurverne for den Jakobiske Differentialligningen af 1. Orden

$$L(xdy - ydx) - Mdy + Ndx = 0,$$

hvor L, M og N er 1. Grads Polynomier. *G. Fouret* har i Comptes rendus 1874 gjort opmærksom paa, at det geometriske Sted for W-kurvernes Røringspunkter med Linier gennem Punktet $P(\alpha, \beta)$ er Keglesnittet med Ligningen

$$\alpha(Ly - N) - \beta(Lx - M) - My + Nx = 0,$$

og at de til alle Planens Punkter svarende Keglesnit danner et Net gennem tre faste Punkter, idet Identiteten

$$M(Ly - N) - N(Lx - M) - L(My - Nx) = 0$$

viser, at de 3 Punkter, som Keglesnittene med Ligningerne

$$Ly - N = 0 \quad \text{og} \quad Lx - M = 0$$

have fælles foruden L's uendelig fjerne Punkt, ogsaa ligger paa Keglesnittet med Ligningen

$$My - Nx = 0.$$

Fouret fører et simpelt geometrisk Bevis for, at Dobbeltforholdet mellem P's Forbindelseslinjer med de 3 faste Punkter og den gennem P gaaende W-kurves Tangent i P er konstant; denne Omstændighed har givet Kurverne deres Navn (W = Wurf). Bestemmelsen af en Integralkurves Tangent i et vilkaarligt Punkt P bliver altsaa projektivt overensstemmende med den tilsvarende Bestemmelse ved Differentialligningen

$$(ay + bx)\frac{dy}{dx} + cx = 0,$$

Digitized by Google

Bibliotek

hvor de faste Punkter er Begyndelsespunktet og de uendelig fjerne Punkter paa l_1 og l_2, hvis det konstante Dobbeltforhold har samme Værdi. De to Differentialligninger maa altsaa kunne gaa over i hinanden ved lineær Transformation og have samme Integralkurver, nemlig W-kurverne.

Danske Eksamensopgaver.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1919.

Matematik for Fabrikingeniører.

1. Hvilken Flade fremstilles ved Ligningen

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4} = 1?$$

Find Ligningen for Fladens Tangentplan i Punktet

$$(0, \frac{\sqrt{21}}{2}, \sqrt{3}).$$

Bestem en Plan parallel med XY-Planen, som sammen med Fladen og Planen $z = -1$ bestemmer et Volumen af Størrelsen $\frac{15\pi\sqrt{6}}{4}$.

2. Find et almindeligt Udtryk for den n^{te} Differentialkvotient af Funktionen

$$y = e^x \sin x.$$

Derefter udvikles Funktionen i en Potensrække efter Stirlings Formel (Taylors Række).

Løsninger:

1. Hyperboloide med 1 Net. Tangentplanens Ligning: $2\sqrt{21}\,y - 3\sqrt{3}z = 12$. En Plan parallel med XY-Planen i Afstanden z skærer Fladen i en Ellipse med Halvakserne

$$\sqrt{2\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)}, \quad \sqrt{3\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)} \quad \text{og Arealet} \quad \pi\sqrt{6}\left(1 + \frac{z^2}{4}\right).$$

Digitized by Google

Det Volumen, som begrænses af Fladen og Planerne $z = -1$ og $z = z$ er

$$\pi\sqrt{6}\int_{-1}^{z}\left(1+\frac{z^2}{4}\right)dz = \left(\frac{z^3}{12}+z+\frac{13}{12}\right)\pi\sqrt{6}.$$

Den søgte Plan bestemmes da ved Ligningen $z^3 + 12z - 32 = 0$ med Roden $z = 2$.

2. $f(x)=e^x \sin x$. $f'(x) = e^x(\sin x+\cos x) = \sqrt{2}\cdot e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{4}\right).\quad f^n(0) = (\sqrt{2})^n \sin n\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Rækkeudviklingen giver

$$f(x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}\cdot 2+\frac{x^3}{3!}\cdot 2-\frac{x^5}{5!}\cdot 2^2-\frac{x^6}{6!}\cdot 2^3-\frac{x^7}{7!}\cdot 2^3+\frac{x^9}{9!}\cdot 2^4$$
$$+\frac{x^{10}}{10!}\cdot 2^5+\frac{x^{11}}{11!}\cdot 2^5+\cdots.$$

Betegnes Koefficienten til $\frac{x^n}{n!}$ ved a_n, bliver

$$a_{4p}=0;\quad a_{4p+1}=(-1)^p\cdot 2^{2p};\quad a_{4p+2}=(-1)^p\cdot 2^{2p+1};$$
$$a_{4p+3}=(-1)^p\cdot 2^{2p+1}.$$

Skoleembedseksamen ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet. I Del.

I. (ny Ordning).

1. En ret Linie er fremstillet i dobbelt Projektion ved Billederne A_L og A_V. Gennem et givet Punkt p af A skal drages en Linie B vinkelret paa A. Denne Linies vandrette Billede B_V er givet. Find dens lodrette Billede.

2. En Rumkurve er givet i et retvinklet Koordinatsystem xyz ved Parameterfremstillingen

$$x = t+1,\quad y=\tfrac{1}{2}t^2,\quad z=\tfrac{1}{4}t^4-t^3,$$

hvor Parameteren t gennemløber alle reelle Værdier. Vis, at Kurven ved et af sine Punkter deles i to simple Buer, og undersøg Kurven i Omegnen af dette Punkt.

Digitized by Google

I. (gl. Ordning).

1. En foranderlig plan Trekant ABC har to konstante Sider AB og AC. Vis, at den tredje Side maa vokse, naar Vinklen A vokser, og omvendt.

2. En foranderlig plan konveks Firkant $ABCD$ har tre konstante Sider AB, BC, CD. Vis, at den fjerde Side maa vokse, naar Vinklerne B og C vokser. Gælder den omvendte Sætning?

3. Vis, at de foregaaende Sætninger kan udvides til Gyldighed for Polygoner med et vilkaarligt Antal Sider. Kan man opstille lignende Sætninger om sfæriske Polygoner?

Løsninger.

I. (ny Ordning).

1. Linien B skal ligge i en Plan gennem p og A.

2. Retningskeglen bestemmes ved

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{t} = \frac{z}{t^3 - 3t^2}$$

eller

$$y^3 - 3y^2x = x^3z.$$

Overskæres denne Kegle med Planen $x = 1$, faar man Ledekurven

$$y^3 - 3y^2 = z.$$

Ved at danne

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 6y - 6,$$

finder man Vendepunktet $y = 1$, $z = -2$, paa Ledekurven. Hertil svarer $t = 1$, altsaa paa den givne Kurve et Punkt med Koordinaterne

$$2, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{4}.$$

I dette Punkt er der modsatte Halvtangenter, sammenfaldende Oskulationshalvplaner. Kurven ligger helt paa den ene Side af Oskulationsplanen.

I. (gl. Ordning).

Den almindelige Sætning om den sfæriske Polygon kendes fra Beviset for Cauchy's Sætning om kongruente Polyedre.

II. (gl. og ny Ordning).

1. For n positiv hel skal man bevise, at Potensrækken

Digitized by Google

$$y_n = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{p^n x^p}{p!}$$

er ubetinget og ligelig konvergent i ethvert endeligt Interval; bevis dernæst, at

$$y_n = f_n(x)\, e^x,$$

hvor $f_n(x)$ er et Polynomium af n^{te} Grad i x med lutter hele Talkoefficienter.

2. Sættes $y_0 = \int_a^x f(x)dx$ og, for n positiv hel, $y_n = \int_a^x x y_{n-1} dx$, skal man bevise den almindelige Formel

$$y_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \int_a^x (x^2 - z^2)^n f(z)\, dz.$$

3. Af Begyndelsesværdierne $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = 2x$ dannes ved Rekursionsformlen

$$\varphi_n(x) = 2x\varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n-2}(x), \qquad n \geqq 3,$$

en uendelig Følge af hele Polynomier; bestem Konstanterne a_n og b_n, saaledes at man identisk har

$$\varphi_n(x) = (x^2 + 1)\chi_{n-2}(x) + a_n x + b_n,$$

hvor $\chi_{n-2}(x)$ er et helt Polynomium (eventuelt Nul).

Løsninger.

1. For den numeriske Værdi af Forholdet mellem to paa hinanden følgende Rækkeled haves

$$\frac{p+1}{|x|\left(1+\frac{1}{p}\right)^n} \geqq \frac{p+1}{2^n \cdot |x|} \geqq \frac{p+1}{2^n K}, \qquad |x| \leqq K;$$

Rækken er derfor ligelig og ubetinget konvergent for $|x| \leqq K$ og tor følgelig differentieres ledvis med Hensyn til x.

Man finder direkte $y_1 = xe^x$, altsaa $f_1(x) = x$; ved Differentiation med Hensyn til x findes endvidere $xy_n' = y_{n+1}$, hvoraf Rekursionsformlen

$$f_{n+1}(x) = x(f_n(x) + f_n'(x)),$$

Digitized by Google

og man ser derved straks, at $f_n(x)$ er et helt Polynomium af n^{te} Grad med lutter hele Talkoefficienter.

2. Ved delvis Integration findes

$$y_1 = \frac{x^2}{2} y_0 - \int_a^x \frac{x^2}{2} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_a^x (x^2 - z^2) f(z)\,dz;$$

antages dernæst Formlen gyldig for y_{n-1}, haves

$$xy_{n-1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot (2n-2)} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n-1}{s} x^{2n-2s-1} \int_a^x z^{2s} f(z)\,dz,$$

og Leddet under Summationstegnet giver, integreret med Hensyn til x,

$$\frac{x^{2n-2s}}{2n-2s}\int_a^x z^{2s} f(z)\,dx - \frac{1}{2n-2s}\int_a^x z^{2n} f(z)\,dz.$$

Da nu, for $s < n$,

$$\frac{1}{2n-2s}\binom{n-1}{s} = \frac{1}{2n}\binom{n}{s}, \quad \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s}{2n-2s}\binom{n-1}{s} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n},$$

ser man umiddelbart, at Formlen ogsaa gælder for y_n.

3. Af Begyndelsesværdierne faas

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1; \quad a_2 = 2,\ b_2 = 0.$$

Indføres nu det almindelige Udtryk i Rekursionsformlen, og anvendes Identiteten $x^2 = (x^2 + 1) - 1$, faas for $n \geqq 3$

$$a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}, \quad b_n = -2a_{n-1} + b_{n-2},$$

hvoraf ved Induktion

$$a_{2n} = (-1)^{n-1} 2n, \quad b_{2n} = 0; \quad a_{2n+1} = 0, \quad b_{2n+1} = (-1)^n (2n+1).$$

III. (gl. og ny Ordning).

1. Find Tyngdepunktet af et homogent Legeme, hvis begrænsende Flader i et retvinklet Koordinatsystem xyz fremstilles ved Ligningerne

$$xy = az, \quad x = a, \quad y = a, \quad z = 0,$$

hvor a er en positiv Konstant.

Digitized by Google

2. En tung Partikel med Masse 1 er bundet til at bevæge sig paa en fast glat Skruelinie med vandret Akse. Skruelinies Radius er a, og dens Tangenter danner en Vinkel paa 45° med Skrueaksen. Partiklen passerer en Stilling, der ligger i Højde med Skrueaksen, med Hastigheden u. Med hvilken Hastighed vil den passere sin laveste Stilling? Find Partiklens Tryk paa Kurven i enhver af de to Stillinger. Hvorledes kan man give en simpel Beskrivelse af Partiklens Bevægelse ved Sammenligning med et matematisk Pendul?

Løsninger:

1. Tyngdepunktets Koordinater er $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}a$, $\frac{1}{6}a$.

2. Hastigheden v i den laveste Stilling bestemmes ved Ligningen

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - u^2) = ga,$$

altsaa

$$v^2 = 2ga + u^2.$$

Trykket i denne Stilling er

$$\frac{v^2}{\rho} + g,$$

hvor $\rho = 2a$ er Skrueliniens Krumningsradius.

Trykket i den Stilling, der ligger i Højde med Aksen, vil være sammensat af 2 Komposanter, een efter Hovednormalen, af Størrelsen $\frac{u^2}{\rho}$, en anden efter Binormalen, = Vægtens Projektion paa denne.

Det bevægelige Punkts Projektion paa den rektificerende Cylinders Normalsnit vil følge Svingningerne af et matematisk Punkt med Længde $2a$. Bevægelsesligningen vil nemlig være

$$\frac{1}{2}\left((2a)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2u^2\right) = g \cdot 2a \cos\theta.$$

Bøger tilsendte Redaktionen.

C. W. Oseen, Atomistika Föreställningar i Nutidens Fysik. Tid, Rum och Materia. Femton Föreläsningar. Stockholm 1919. Albert Bonniers Förlag.

Digitized by Google

Telefon-Ventetider.

Et Stykke Sandsynlighedsregning.

Af A. K. Erlang.

1. Formulering af Opgaven; Vejen til Løsningen.

Det har i nogle Aar været klart for alle sagkyndige, maaske særlig i Danmark, at man kun gennem Sandsynlighedsregningen kan naa til fuldt rationelle Fremgangsmaader i Telefonien; dette gælder baade med Hensyn til Udnyttelse af Ledninger og af Telefonistinde-Arbejde, og det gælder i særlig Grad de nyeste, mere eller mindre automatiske Former for Telefonien. Nogle af de Opgaver, som her i første Række kommer i Betragtning, har jeg behandlet i en Artikel i »Elektroteknikeren« 1917 (og derefter i »Elektrotechnische Zeitschrift« 1918 og »The Post Office Electrical Engineers' Journal« 1918), hvor jeg imidlertid for Kortheds Skyld til Dels har udeladt Beviser og kun givet de resulterende Formler og numeriske Resultater. Her skal kun omtales en enkelt vigtig Opgave, nemlig at finde Sandsynligheden for, at Ventetiden ikke overskrider en given Størrelse z, udtrykt som Funktion af z. Givne er da Antallet x af Ledninger til Raadighed, Samtalelængden t og Trafikintensiteten y, d. e. Middeltallet af samtidig løbende Samtaler, eller, om man vil, Middeltantallet af Kald (»Opringninger«) for en Tid lig med t. Vi forudsætter $y < x$. En Forudsætning er, at den, der kalder, og ikke kan faa Forbindelse straks, fordi alle x Ledninger er i Brug, altid venter, eventuelt i »Række« med andre ventende, til der bliver en Ledning til ham. Men Hensyn til Samtalelængden t bemærkes, at denne her antages konstant; denne Antagelse passer godt for de udenbys Samtaler, men mindre godt for de indenbys Samtaler, der som bekendt er af ret varierende Længde, hvorved der opstaar en Opgave af en noget anden Art end den, vi her alene kan behandle. Endnu skal tilføjes, at det vil være bekvemt at vælge Tidsenheden paa en særlig Maade, enten saaledes, at man tager Samtalelængden til Tidsenhed, eller saaledes, at der kommer 1 Kald gennemsnitlig pr.

Digitized by Google

Tidsenhed; denne sidste Maade vil vi her foretrække; dette medfører, at $t = y$.

Man kan komme til eller i det mindste nærme sig til Løsningen af vor Opgave ad ret forskellige Veje; som Regel vil man finde, at det specielle Tilfælde $x = 1$ (1 Ledning) er betydelig simplere at behandle end det almindelige. Man kan bl. a. udlede en Differentialligning

$$\binom{x}{0} f(z) - \binom{x}{1} f'(z) + \binom{x}{2} f''(z) - \cdots \binom{x}{x} f^{(x)}(z) = f(z-t);$$

ved Integration heraf kan man, da man paa Forhaand ved, at $f(z) = 0$ for alle negative Værdier af z, bestemme Funktionens Forløb, først fra $z = 0$ til $z = t$, derpaa fra $z = t$ til $z = 2t$. o. s. v. Men man støder her paa Vanskeligheder ved Bestemmelse af Integrationskonstanterne, og kun i det specielle Tilfælde $x = 1$ gaar det hele let nok, som det nærmere kan ses i min Artikel i »Nyt Tidsskrift for Matematik« 1909, hvor dette Tilfælde er behandlet paa nævnte Maade.

Man kan saa i Stedet benytte en Integralligning, nemlig

$$f(z) = \int_0^\infty f(z+u-t) \frac{u^{x-1}}{(x-1)!} e^{-u} du,$$

hvorved man ret umiddelbart føres til en (i nogle Tilfælde) ret bekvem numerisk Ligning, men derimod næppe til en explicit matematisk Løsning.

Vi gaar i det følgende en helt anden Vej, som begynder med Indførelsen af et Sæt Konstanter, a_0, a_1, $a_2 \cdots a_{x-1}$, som er Funktioner af y, eller om man vil af α, idet α betyder Forholdet mellem y og x. Bestemmelsen af disse Konstanter følger, som vi skal se, af nogle elementære Betragtninger, hvorved man føres ind paa at benytte visse uendelige Rækker, hvis Led alle er Værdier af Funktionen $e^{-y} \cdot \frac{y^x}{x!}$, saaledes at forstaa, at hver Rækkes Led vil være at finde, i en tabellarisk Fremstilling af Funktionen, langs en eller anden »Skraalinie« og fordelte med lige store Intervaller. En Tabel som den omtalte (men kun for positive Værdier af y) findes i K. Pearson's Tabelsamling; en lignende Tabel, men omfattende negative Værdier af y, følger nedenfor i Tillæget. Med Hensyn til Funktionen $e^{-y} \frac{y^x}{x!}$ maa endnu kun bemærkes, at dens

Digitized by Google

Betydning for nærværende Opgave, som for en hel Del andre, beror paa følgende vigtige Sætning, der hvad det matematiske Indhold angaar allerede er fundet af *Poisson:* Sandsynligheden for et vilkaarligt Antal (x) Kald i et Tidsrum, der gennemsnitlig har y Kald, er lig med

$$e^{-y}\frac{y^x}{x!}.$$

(Denne Sætning findes ikke i de sædvanlige Lærebøger i Sandsynlighedsregning, og jeg har derfor i Tillæget nedenfor givet et simpelt Bevis for den).

Bestemmelsen af Konstanterne a_0, a_1, $a_2 \cdots a_{x-1}$ paa den antydede Maade er i nogle Tilfælde meget brugelig, men i andre upraktisk, nemlig naar α er stor (nær ved 1), da Rækkerne saa er svagt konvergerende. Vi vil derfor ogsaa give Bestemmelsen af Konstanterne i en anden og smukkere Form, idet vi indfører et Sæt Hjælpestørrelser (i Regelen imaginære), β, $\gamma, \cdots$, ialt x i Antal, naar α medtages; de bestemmes ved en vis transcendent Ligning, hvori de er Rødder. Man kan saa ved Benyttelse af en Sætning, der skyldes Telefoningeniør Dr. phil. J. L. W. V. Jensen, summere de omtalte uendelige Rækker. Man faar saa Løsningen af vor Opgave bragt paa en simpel og bekvem Form.

I det følgende vil jeg udførlig og paa ensartet Maade gennemgaa de to specielle Tilfælde, først $x = 1$, d. e. 1 Ledning (i Afsnit 2—6), derpaa $x = 2$, d. e. 2 Ledninger (i Afsnit 7—11); jeg har saa ment det unødvendigt udtrykkeligt at formulere Beviset for det almindelige Tilfælde.

2. Det simpleste Tilfælde, $x = 1$, Definition af a_0.

Ved a_0 forstaar vi Sandsynligheden for, at der ingen Ventetid kommer efter et (vilkaarligt) Kald. Man finder her straks:

$$a_0 = 1 - \alpha;$$

a_0 er nemlig Sandsynligheden for, at Ledningen er ledig, og α er Sandsynligheden for, at den er optaget.

3. Tabellen og Skraalinierne.

Tabellen over den Poisson'ske Funktion $e^{-y}\cdot\frac{y^x}{x!}$ vil, naar baade x og y tænkes variable, udfylde en Plan; vi kan be-

Digitized by Google

gynde med at lægge en X-akse og en Y-akse (f. Eks. X-aksen nedad, Y-aksen til højre) i Planen og derpaa indskrive hver enkelt Funktionsværdi saa nær som muligt ved det Punkt, der har Koordinaterne x og y. Vi faar iøvrigt kun at gøre med hele Værdier af x; og de negative Værdier af x kan, om man vil, udelades, da Funktionen her er 0. Vi tænker os nu lagt gennem Planen visse Skraalinier, alle med Retningskoefficienten α; paa hver Linie udsøger vi en Række Punkter med lige store Mellemrum, svarende til en Tilvækst i Abscissen paa 1, i Ordinaten paa α; Summen af de paagældende Funktionsværdier betegnes ved Bogstavet σ, og som Indices tilføjes Koordinaterne til eet af Punkterne (da herved ogsaa Beliggenheden af alle de andre Punkter er bestemt). Hvis dette Punkt ligger paa X-aksen, kan man dog, for Kortheds Skyld udelade den anden Indeks, som er 0. Disse Rækker lader vi strække sig i det uendelige i begge Retninger (eller, om man vil, i den ene Retning, og i den anden Retning saa langt, til Leddene af sig selv bliver 0). Medtages i Rækken kun de af Leddene, der svarer til Punkter med positive Ordinater, betegnes Summen ved s; medtages kun de øvrige Led, altsaa de, der svarer til Punkter med negative Ordinater (samt 0), betegnes Summen ved r. (I begge Tilfælde tilføjes Indices, som før omtalt). Man har da altid:

$$r_{x,y} + s_{x,y} = \sigma_{x,y}.$$

I mange Tilfælde er σ og s ensbetydende, og $r = 0$; nemlig naar Skraalinien skærer den negative Del af X-aksen. — (At Rækkerne er konvergente, ses let).

4. Relationer vedrørende a_0.

Uagtet vi allerede har fundet Værdien af a_0, vil det nu være nyttigt at bevise følgende Relationer:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 1 - a_0 s_0 \\ 0 &= 1 - a_0 s_{-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (1-2)$$

hvor (i Henhold til det foregaaende)

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= e^{-\alpha}\frac{\alpha^1}{1!} + e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots \\ s_{-1} &= e^{-\alpha}\frac{\alpha^0}{0!} + e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^1}{1!} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3-4)$$

Digitized by Google

(Disse to Ligninger (1—2) kan, som vi senere skal se, skrives paa en anden Form, idet man indfører Summerne σ i Stedet for Summerne s; men vi beviser den først i den nævnte Form).

Beviset for Ligning 1 kan føres saaledes: Betragter vi nærmere alle de Tilfælde, hvor et vilkaarligt Kald rammes af en Ventetid, ser man, at Tilfældene kan fordeles eller opføres i Grupper som følger:

1) I det forudgaaende Tidsr. af Længden t (ell. α) var der 1 Kald,
2) · · — — · · — $2t$ var der 2 Kald,
3) · · — — · — $3t$ var der 3 Kald,

o. s. v. (Man faar uendelig mange Grupper; men da de paagældende Sandsynligheder danner en konvergent Række, kan der ikke være Tvivl om, at den søgte samlede Sandsynlighed $1 - a_0$ eksisterer som en bestemt Grænseværdi; en lignende Bemærkning kunde gøres flere Steder i det følgende). Ved den omtalte Inddeling i Grupper maa man dog passe vel paa, at man ikke opfører det samme Tilfælde under 2 forskellige Grupper, og for at undgaa Usikkerhed vil vi vedtage, at vi altid skal foretrække den Gruppe, der har det højere Numer for den med det lavere. Det stemmer hermed, at der ovenfor under Omtalen af Gruppe 1 staar »1 Kald« (d. v. s. netop 1 Kald, ikke flere) og tilsvarende under de følgende Grupper; men de Tilfælde, som herefter skulde tages med, maa nu yderligere sigtes. Man ser let, at Sandsynligheden for, at et Tilfælde virkelig hører hjemme i den Gruppe, hvor det foreløbig er opført, er den samme som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Kald ikke faar nogen Ventetid, altsaa lig med a_0. Lad os nemlig antage, at et Tilfælde er blevet foreløbig noteret under Gruppe 3 (f. Eks.); vi ved da, at der har været 3 Kald i det foregaaende Tidsrum $3t$, men andet ved vi ikke; vi maa da stille os paa det Tidspunkt, som ligger $3t$ forud for Kaldet, og søge videre tilbage i Tiden, først et Stykke t, om der herved kan findes 1 Kald, saa et Stykke $2t$, om der herved kan findes 2 Kald, o. s. v.; man maa altsaa foretage netop den samme Undersøgelse, kun ud fra et andet Tidspunkt, som da vi nylig begyndte at opregne de Tilfælde, der fører til en Ventetid. — Man faar altsaa:

$$a_0 = 1 - a_0\left(e^{-\alpha}\frac{\alpha^1}{1!} + e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots\right)$$

eller kortere:

Digitized by Google

$$a_0 = 1 - a_0 \cdot s_0,$$

hvilket skulde bevises. Ligning (2) kan bevises paa ganske tilsvarende Maade, hvad vi ikke skal opholde os ved (da v: strengt taget har nok i Ligning 1). Ligningerne 1 og 2 faar en simplere og mere ensartet Form, naar man indfører Størrelserne σ i Stedet for s, nemlig:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_0\sigma_0 \\ 1 &= a_0\sigma_{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (5—6)$$

Betydningen af disse 2 Ligninger (hvis Antal let kunde forøges), er foreløbig den, at man ved enhver af dem kan finde a_0 (idet vi ser bort fra, at vi her, hvor $x = 1$, allerede paa simplere Maade har fundet a_0). Men de har iøvrigt ogsaa en anden Betydning, hvorom senere.

5. Om Summationen af de uendelige Rækker.

De uendelige Rækker σ, som vi har benyttet ovenfor, kan summeres ved Hjælp af en Sætning af *Jensen* (Acta Math. t. 26, 1902; S. 309, Formel 7). Sætningen lyder med lidt ændrede Betegnelser:

$$\frac{1}{1-\alpha} = e^{-a} \cdot \frac{a^0}{0!} + e^{-(a+\alpha)} \cdot \frac{(a+\alpha)^1}{1!} + e^{-(a+2\alpha)} \cdot \frac{(a+2\alpha)^2}{2!} + \cdots, \qquad (7)$$

og den gælder for alle Værdier (reelle og imaginære) af a, naar blot $|\alpha e^{-\alpha}| < \frac{1}{e}$, og tillige $|\alpha| < 1$. Den gælder altsaa i hvert Fald for de Værdier af α, som vi her benytter, nemlig de positive Tal mellem 0 og 1. I Øjeblikket skal vi kun betragte 2 specielle Tilfælde af Sætningen, nemlig for $a = 0$, og $a = \alpha$, og faar da:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= e^{-0} \frac{0^0}{0!} + e^{-\alpha} \frac{\alpha^1}{1!} + e^{-2\alpha} \frac{(2\alpha)^2}{2!} + \cdots = \frac{1}{1-\alpha} \\ \sigma_{-1} &= \qquad e^{-\alpha} \frac{\alpha^0}{0!} + e^{-2\alpha} \frac{(2\alpha)^1}{1!} + \cdots = \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (8—9)$$

Ved Benyttelse heraf og af Lign. 5—6 ser man, at

$$a_0 = 1 - \alpha,$$

som vi allerede vidste. (Ligesom for Størrelserne σ kan man

Digitized by Google

ogsaa for Størrelserne s finde simple Udtryk, dog ikke fuldt saa simple).

6. Anvendelse af den fundne Størrelse a_0 til Løsning af Hovedopgaven.

Vi skal nu finde $S\left(\frac{>}{z}\right)$ det vil sige Sandsynligheden for en Ventetid større end z; eller Komplementet hertil $S\left(\frac{\leq}{z}\right)$. Vi betragter da Ligning (1), som vi nu vil generalisere. Vi erstatter paa venstre Side a_0 med $S\left(\frac{\leq}{z}\right)$, og paa højre Side s_0 med $s_{(0,\,-z)}$; med andre Ord, vi rykker den paagældende Skraalinie et Stykke z til venstre. Den fremkomne Ligning:

$$\left.\begin{aligned} S\left(\frac{\leq}{z}\right) &= 1 - a_0 \cdot s_{(0\ -z)} \\ \text{eller} \qquad S\left(\frac{>}{z}\right) &= \qquad a_0 \cdot s_{(0,\,-z)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

bevises ganske som den oprindelige Ligning (1). (Ogsaa Ligning 2 kan generaliseres paa lignende Maade, men vi behøver ikke at gaa ind herpaa).

Ligning (10) har den Ulempe, at den indeholder en uendelig Række; men denne kan let erstattes med en endelig. Man har:

$$r_{(0,\,-z)} + s_{(0,\,-z)} = \sigma_{(0,\,-z)} \qquad (11)$$

$$a_0 \cdot \sigma_{(0,\,-z)} = 1, \qquad (12)$$

hvilket sidste følger af *Jensens* Sætning.

Herved faas af (10):

$$S\left(\frac{>}{z}\right) = 1 - a_0 r_{(0,\,-z)} \qquad (13)$$

eller

$$S\left(\frac{\leq}{z}\right) = \qquad a_0 r_{(0,\,-z)}. \qquad (14)$$

Denne Formel gælder for alle Værdier af z; men hvor mange Led der fremkommer, afhænger af, om vi behandler første Interval, $0 < z < t$, andet Interval, $t < z < 2t$, o. s. v. Man kan (som jeg andensteds har gjort) herved benytte visse særlige Konstanter $b_0, b_1, \ldots c_0, c_1, c_2, c_3$; o. s. v. for at opskrive de

Digitized by Google

Formler, der angaar hvert enkelt Interval; men disse Konstanter udledes let af a_0. Formlen (14) siger i Virkeligheden det hele paa den simpleste og bekvemmeste Form.

7. Definition af a_1 og a_0.

Ved a_1 forstaar vi Sandsynligheden for, at der ingen Ventetid kommer efter et vilkaarligt Kald (eller at der er mindst 1 ledig Ledning); ved a_0 forstaas Sandsynligheden for, at der ingen Ventetid kommer efter et Kald, naar der er gaaet et lige forud, (eller at et vilkaarligt Kald finder begge Ledninger ledige). Man faar straks Relationen:

$$a_1 + a_0 = 2(1 - \alpha); \tag{15}$$

a_1 er nemlig Sandsynligheden for, at der paa et vilkaarligt Tidspunkt er mindst 1 ledig Ledning, og a_0 er Sandsynligheden for, at der er 2; og $2(1 - \alpha)$ er det gennemsnitlige Antal af ledige Ledninger. — (Ligninger i tilstrækkeligt Antal til Bestemmelse af a_1 og a_0 følger senere).

8. Tabellen og Skraalinierne.

Vi benytter ogsaa her den førnævnte Tabel, og definerer visse Summer, dels endelige, dels uendelige, betegnede ved Bogstaverne σ, r og s, og knytter Definitionerne til visse Skraalinier, med Retningskoefficienten α, i Tabellens Plan. Forskellen er kun den, at Differensen i Abscissen paa de successive Punkter, som udvælges langs en Skraalinie, ikke er 1, men 2; Differensen i Ordinaten er ikke α, men 2α. Vi benytter som før 2 Indices, nemlig Abscissen og Ordinaten til eet af Punkterne, idet vi dog kan udelade Ordinaten, naar den er 0. I Tilfælde af, at Forveksling mellem de tidligere definerede Summer og de hermed indførte kan befrygtes, tilføjes som yderligere Betegnelse henholdsvis 1 Streg og 2 Streger. Man har ogsaa her

$$r_{(x,y)} + s_{(x,y)} = \sigma_{(x,y)}, \tag{16}$$

hvor Betegnelsen σ antyder, at alle Led medtages (eller alle, der ikke er 0); s derimod, at kun de medtages, der svarer til Punkter med positive Ordinater; og r, at kun de medtages, der svarer til negative Ordinater, 0 medregnet. (I mange Tilfælde er σ og s ligestore, og $r = 0$, nemlig naar Skraalinien skærer den negative Del af X aksen, eller eventuelt den positive Del mellem Punkterne $x = 0$ og $x = 1$).

Digitized by Google

Studentersamfundets Bibliotek TEKNISK TIDER

9. Bestemmelse af a_0 og a_1.

Vi vil bevise, at man har:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 - (a_1 s_0 + a_0 s_1) \\ a_0 &= 1 - (a_1 s_{-1} + a_0 s_0) \\ 0 &= 1 - (a s_{-2} + a_0 s_{-1}), \end{aligned}\right\} \qquad (17—19)$$

hvor (i Henhold til det foregaaende)

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= e^{-t}\frac{t^3}{3!} + e^{-2t}\frac{(2t)^5}{5!} + \cdots \\ s_0 &= e^{-t}\frac{t^2}{2!} + e^{-2t}\frac{(2t)^4}{4!} + \cdots \\ s_{-1} &= e^{-t}\frac{t^1}{1!} + e^{-2t}\frac{(2t)^3}{3!} + \cdots \\ s_{-2} &= e^{-t}\frac{t^0}{0!} + e^{-2t}\frac{(2t)^2}{2!} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (20—23)$$

eller, om man vil:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^3}{3!} + e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^5}{5!} + \cdots \\ s_0 &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^2}{2!} + e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^4}{4!} + \cdots \\ s_{-1} &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^1}{1!} + e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^3}{3!} + \cdots \\ s_{-2} &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^0}{0!} + e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^2}{2!} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (24—27)$$

(Ligning (17—19) kan, som vi senere skal se, skrives paa en anden Form, idet man indfører Summerne σ i Stedet for Summerne s; men vi beviser dem i den Form, som er givet ovenfor).

Beviset for Ligning (17) kan føres saaledes: Betragter vi alle de Tilfælde, hvor et vilkaarligt Kald rammes af en Ventetid, vil man se, at Tilfældene kan opføres i forskellige Grupper som følger:

1) I det forudgaaende Tidsrum af Længden t (eller 2α) var der 2 eller 3 Kald,
2) I det forudgaaende Tidsrum af Længden $2t$ var der 4 eller 5 Kald,
3) I det forudgaaende Tidsrum af Længden $3t$ var der 6 eller 7 Kald,

o. s. v. Ved denne Inddeling i Grupper maa man dog passe

Digitized by Google

vel paa, at man ikke opfører det samme Tilfælde under 2 forskellige Grupper, og for at undgaa Usikkerhed vil vi vedtage, at vi altid skal foretrække den Gruppe, der har det højere Numer, for den med det lavere. Det stemmer godt hermed, at der ovenfor under Omtalen af Gruppe 1 staar »2 eller 3 Kald« (d. v. s. ikke flere) og tilsvarende under de følgende Grupper; men de Tilfælde, som herefter skulde tages med, maa nu yderligere sigtes. Herved maa vi inden for Gruppe 1 skelne mellem en Undergruppe *a* (d. e. 2 Kald) og en Undergruppe *b* (3 Kald) og tilsvarende inden for de andre Grupper. Man ser nu let, at Sandsynligheden for, at et Tilfælde virkelig hører hjemme i en Undergruppe *a*, hvor det foreløbig har faaet Plads, er det samme som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Kald ikke faar nogen Ventetid, altsaa a_1. Og ligeledes, at Sandsynligheden for at et Tilfælde, der foreløbig har faaet Plads i en Undergruppe *b*, virkelig hører hjemme der, er det samme som Sandsynligheden for, at et vilkaarligt Kald ikke faar nogen Ventetid og tilmed træffer begge Ledninger ledige, altsaa a_0. Man faar da:

$$a_1 = 1 - a_1\left(e^{-t}\frac{t^2}{2!} + e^{-2t}\frac{(2t)^4}{4!} + \cdots\right) - a_0\left(e^{-t}\frac{t^3}{3!} + e^{-2t}\frac{(2t)^5}{5!} + \cdots\right)$$

eller

$$a_1 = 1 - (a_1 s_0 + a_0 s_1),$$

hvilket skulde bevises.

Ligningerne (18) og (19) kan bevises paa lignende Maade, men vi skal ikke opholde os derved.

Ligningerne 17—19 faar en simplere og mere ensartet Form, naar man indfører Størrelserne σ i Stedet for Størrelserne s, nemlig:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_1\sigma_0 + a_0\sigma_1 \\ 1 &= a_1\sigma_{-1} + a_0\sigma_0 \\ 1 &= a_1\sigma_{-2} + a_0\sigma_{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (28—30)$$

Betydningen af disse 3 Ligninger (hvis Antal let kunde forøges) er den, at man af 2 vilkaarlige af dem (eller, naar Hensyn tages til Ligning 15, ved en enkelt af dem) kan bestemme Konstanterne a_1 og a_0. (De har iøvrigt ogsaa en anden Betydning, hvorom senere).

Digitized by Google

10. **Indførelse af den nye Konstant β, Summation af de uendelige Rækker og Bestemmelse af a_1 og a_0.**

De uendelige Rækker, som vi nu har Interesse af at summere, er følgende:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= e^0\frac{0^1}{1!}+e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^3}{3!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^5}{5!}+\cdots\\
\sigma^0 &= e^0\frac{0^1}{0!}+e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^2}{2!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^4}{4!}+\cdots\\
\sigma_{-1} &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^1}{1!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^3}{3!}+\cdots\\
\sigma_{-2} &= e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^0}{0!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^2}{2!}+\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(31-34)$$

Nu kender man Summen af følgende Rækker (som er nær beslægtede med de lige nævnte). (Jensens Sætning, Ligning 7 ovenfor):

$$\left.\begin{aligned}
{}^{=}e^{\alpha}\ \frac{(-\alpha)^0}{0!}+e^0\frac{0^1}{1!}+e^{-\alpha}\frac{\alpha^2}{2!}+e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^3}{3!}+\cdots &= \frac{1}{1-\alpha}\\
{}^{=}e^0\ \frac{0^0}{0!}+e^{-\alpha}\frac{\alpha^1}{1!}+e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^2}{2!}+e^{-3\alpha}\frac{(3\alpha)^3}{3!}+\cdots &= \frac{1}{1-\alpha}\\
{}^{-}e^{-\alpha}\ \frac{\alpha^0}{0!}+e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^1}{1!}+e^{-3\alpha}\frac{(3\alpha)^2}{2!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^3}{3!}+\cdots &= \frac{1}{1-\alpha}\\
{}^{-}e^{-2\alpha}\frac{(2\alpha)^0}{0!}+e^{-3\alpha}\frac{(3\alpha)^1}{1!}+e^{-4\alpha}\frac{(4\alpha)^2}{2!}+e^{-5\alpha}\frac{(5\alpha)^3}{3!}+\cdots &= \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}\right\}\quad(35-38)$$

Forskellen paa Rækkerne ${}^{=}\sigma$ og ${}^{-}\sigma$ er kun den, at de første mangler hvert andet Led af dem, der findes i de sidste. Man faar nu (af Lign. 35—38):

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= (\alpha e^{-\alpha})^{-1}\cdot\frac{(-1)^0}{0!}+(\alpha e^{-\alpha})^0\frac{0^1}{1!}+(\alpha e^{-\alpha})^1\frac{1^2}{2!}+\cdots = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\\
\sigma_0 &= (\alpha e^{-\alpha})^0\frac{0^0}{0!}+(\alpha e^{-\alpha})^1\frac{1^1}{1!}+(\alpha e^{-\alpha})^2\frac{2^2}{2!}+\cdots = \frac{1}{1-\alpha}\\
\sigma_{-1} &= (\alpha e^{-\alpha})^1\frac{1^0}{0!}+(\alpha e^{-\alpha})^2\frac{2^1}{1!}+(\alpha e^{-\alpha})^3\frac{3^2}{2!}+\cdots = \frac{\alpha}{1-\alpha}\\
\sigma_{-2} &= (\alpha e^{-\alpha})^2\frac{2^0}{0!}+(\alpha e^{-\alpha})^3\frac{3^1}{1!}+(\alpha e^{-\alpha})^4\frac{4^2}{2!}+\cdots = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}
\end{aligned}\right\}\quad(39-42)$$

hvis man nu i disse 4 Rækker, der alle er ordnede efter Potenser af $\alpha e^{-\alpha}$, ønsker at udelade hvert andet Led (Leddene med ulige Eksponent), for at faa Værdien af de 4 Størrelser

Digitized by Google

$$\frac{1}{\alpha}\cdot \|\sigma_1$$
$$\|\sigma_0$$
$$\alpha\cdot \|\sigma_{-1}$$
$$\alpha^2\cdot \|\sigma_{-2},$$

saa opnaas dette ved (i hver Række) at erstatte α med en ny Konstant β, bestemt ved Ligningen

$$\beta e^{-\beta} = -\alpha e^{-\alpha},$$

og derpaa danne Middeltal af det ny og det gamle Resultat. Det bemærkes, at Ligningen altid har en (negativ) Rod, som kan bruges (d. e. paa hvilken man kan anvende Jensens Sætning); der findes iøvrigt kun 1 brugelig Rod.

Man faar altsaa:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}\cdot \|\sigma_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\right)\\
\|\sigma_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta}\right)\\
\alpha\cdot \|\sigma_{-1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\\
\alpha^2\cdot \|\sigma_{-2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\beta^2}{1-\beta}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (43-46)$$

eller

$$\left.\begin{aligned}
\|\sigma_1 &= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\right)\\
\|\sigma_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta}\right)\\
\|\sigma_{-1} &= \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}\right)\\
\|\sigma_{-2} &= \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\beta^2}{1-\beta}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (47-50)$$

Ligesom vi nu har fundet Størrelserne $\|\sigma$ (udtrykt ved α og β), kan man naturligvis gøre det samme ved Størrelserne $\|s$; men Udtrykkene bliver ikke fuldt saa smukke. Ved Ligningerne (28—30), samt (47—50), findes nu:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \quad 2(1-\alpha)\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\\
a_0 &= -2(1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha-\beta}
\end{aligned}\right\} \quad (51-52$$

som iøvrigt ved Indsættelse ses at tilfredsstille ikke alene 28—30 men alle de analoge, d. v. s. i større Almindelighed Ligninge

Digitized by Google

$$a_1\sigma_p + a_0\sigma_{p+1} = 0;$$

man faar nemlig:

$$2(1-\alpha)\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^p}{2}\left(\frac{1}{\alpha^p(1-\alpha)}+\frac{1}{\beta^p(1-\beta)}\right)$$
$$-2(1-\alpha)\frac{\beta}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{p+1}}{2}\left(\frac{1}{\alpha^{p+1}(1-\alpha)}+\frac{1}{\beta^{p+1}(1-\beta)}\right)=1.$$

II. Anvendelse af de fundne Størrelser a_1 og a_0 til Løsning af Hovedopgaven.

Vi vil nu bestemme $S\left(\frac{>}{z}\right)$, d. e. Sandsynligheden for en Ventetid større end z; eller $S\left(\frac{\leq}{z}\right)$, som er Komplementet hertil. Vi betragter Ligning (17), som vi nu vil generalisere. Vi erstatter paa venstre Side σ_1 med $S\left(\frac{\leq}{z}\right)$, og paa højre Side s_0 og s_1 henholdsvis med $s_{(0,\,-z)}$ og $s_{(1,\,-z)}$; med andre Ord, vi rykker den paagældende Skraalinie et Stykke z til venstre. Den fremkomne Ligning

$$S\left(\frac{\leq}{z}\right) = 1 - (a_1 \cdot s_{(0,\,-z)} + a_0 s_{(1,\,-z)}) \qquad (53)$$

eller

$$S\left(\frac{>}{z}\right) = a_1 \cdot s_{(0,\,-z)} + a_0 s_{(1,\,-z)} \qquad (54)$$

kan bevises ganske som Lign. 17. (Ogsaa Lign. 18 og 19 kan generaliseres paa lignende Maade; men vi behøver ikke at gaa ind herpaa).

Man kan nu i Lign. (53—54) erstatte de uendelige Rækker med endelige. Man har

$$r_{(0,\,-z)} + s_{(0,\,-z)} = \sigma_{(0,\,-z)} \qquad (55)$$
$$r_{(1,\,-z)} + s_{(1,\,-z)} = \sigma_{(1,\,-z)} \qquad (56)$$
$$a_1\sigma_{(0,\,-z)} + a_0\sigma_{(1,\,-z)} = 1, \qquad (57)$$

altsaa faar man

$$S\left(\frac{>}{z}\right) = 1 - a_1 r_{(0,\,-z} - a_0 r_{(1,\,-z)} \qquad (58)$$

eller

$$S\left(\frac{\leq}{z}\right) = a_1 r_{(0,\,-z)} - a_0 r_{(1,\,-z)} \qquad (59)$$

Formlen gælder for alle Værdier af z. Hvor mange Led der indgaar i Formlen, afhænger af, om z ligger i første Interval, $0 < z < t$, eller i andet Interval, $t < z < 2t$, o. s. v. Man kan

Digitized by Google

(som jeg har gjort andensteds) let opskrive de specielle Formler, som gælder for de enkelte Intervaller; de heri indgaaende Konstanter b_0, b_1, b_2, b_3; $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$; o. s. v. udledes let af a_0 og a_1. Men Formlen 58—59 siger i Virkeligheden det hele, og vistnok paa den allerbedste Form.

Tillæg.

Bevis for den ovenfor benyttede Sætning, nemlig: Naar der i et vist Tidsrum gennemsnitlig falder y Kald, saa vil Sandsynligheden for, at der falder x Kald, være

$$S_x = e^{-y} \frac{y^x}{x!}.$$

Vi kan tænke os, at det Tidsrum, vi betragter, udgør et Afsnit af en meget lang Tid, hvorover der spredes et tilsvarende stort Antal Kald, saaledes at der gennemsnitlig falder y paa det betragtede Tidsrum. Længden af dette kan vi kalde y, idet vi vælger Tidsenheden saaledes, at der gennemsnitlig falder 1 Kald pr. Tidsenhed. Lad os antage, at der i et vist Tilfælde falder f. Eks. 5 Kald i Tidsrummet y, og lad os flytte y et lille Stykke dy; der vil da være en Sandsynlighed $5\frac{dy}{y}$ for, at 1 af de 5 slipper udenfor, saa at Tallet gaar ned til 4. Omvendt, hvis vi før Flytningen havde 4 Kald, vil der være en Sandsynlighed dy for at vinde 1 nyt Kald ved Forskydningen. Men Overgangen fra Tallet 5 til Tallet 4 og omvendt maa hæve hinanden, altsaa:

$$S_5 \cdot \frac{5}{y} = S_4.$$

Dette Resultat og de analoge giver os Forholdet mellem de successive Led i Rækken $S_0, S_1, S_2 \cdots$; disse maa da være proportionale med

$$1, \quad \frac{y}{1!}, \quad \frac{y^2}{2!}, \quad \frac{y^3}{3!} \cdots.$$

Da man nu maa have

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots = 1,$$

og da

$$1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots = e^y,$$

faar man

$$S_0 = e^{-y}, \quad S_1 = e^{-y} \frac{y}{1!}, \quad S_2 = e^{-y} \frac{y^2}{2!} \cdots,$$

som det skulde bevises.

Digitized by Google

Tabel 1 a.

Værdier af Funktionen $e^{-y} \cdot \frac{y^x}{x!}$ for y negativ.

(Funktionsværdierne for x ulige er negative).

— 1·0	— 0·9	— 0·8	— 0·7	— 0·6	— 0·5	— 0·4	— 0·3	— 0·2	— 0·1	— 0·0	y / x
2·718282	2·459603	2·225541	2·013753	1·822119	1·648721	1·491825	1·349859	1·221403	1·105171	1·000000	0
2·718282	2·213643	1·780433	1·409627	1·093271	824360	596730	404958	244281	110517		1
1·359141	996139	712173	493369	327981	206090	119346	60744	24428	5526		2
453047	298842	189913	115119	65596	34348	15913	6074	1629	184		3
113262	67239	37983	20146	9839	4294	1591	456	81	5		4
22652	12103	6077	2820	1181	429	127	27	3	0		5
3775	1815	810	329	118	36	8	1				6
539	233	93	33	10	3	0					7
67	26	9	3	1	0						8
7	3	1									9
1	0										10

Studenterforeningens
TELEFON-VENTETIDER.
Bibliotek

Digitized by Google

Tabel 1 b.

— 2·0	— 1·9	— 1·8	— 1·7	— 1·6	— 1·5	— 1·4	— 1·3	— 1·2	— 1·1	— 1·0	y/x
7·389056	6·685894	6·049647	5·473947	4·953032	4·481689	4·055200	3·669297	3·320117	3·004166	2·718282	0
14·778112	12·703199	10·889365	9·305711	7·924852	6·722534	5·677280	4·770086	3·984140	3·304583	2·718282	1
14·778112	12·068039	9·800429	7·909854	6·339881	5·041900	3·974096	3·100556	2·390484	1·817520	1·359141	2
9·852075	7·643092	5·880257	4·482251	3·381270	2·520950	1·854578	1·343574	956194	666424	453047	3
4·926037	3·630468	2·646116	1·904957	1·352508	945356	649102	436662	286858	183267	113262	4
1·970415	1·379578	952602	647685	432803	283607	181749	113532	68846	40319	22652	5
656805	436866	285781	183511	115414	70902	42408	24599	13769	7392	3775	6
187659	118578	73486	44567	26380	15193	8482	4568	2360	1162	539	7
46915	28162	16534	9470	5276	2849	1484	742	354	160	67	8
10425	5945	3307	1789	938	475	231	107	47	20	7	9
2085	1130	595	304	150	71	32	14	6	2	1	10
379	195	97	47	22	10	4	2	1	0		11
63	31	15	7	3	1	0	0	0			12
10	5	2	1	0	0						13
1	1	0	0								14
0	0										15

Digitized by Google

Tabel 2.

Værdier af Konstanterne a_0 for $x = 1$; a_1 og a_0 for $x = 2$.

	$x = 1$	$x = 2$	
α	a_0	a_1	a_0
0·0	1·0	1·000000	1·000000
1	9	982234	817766
2	8	935507	664493
3	7	866418	533582
4	6	779180	420820
5	5	676741	323259
6	4	561316	238684
7	3	434633	165367
8	2	298104	101896
9	1	152892	047108
1·0	0	000000	000000

Tabel 3.

Værdier af $S\left(\frac{<}{z}\right)$ for $x = 1$ og $x = 2$.

$x = 1$.

α \ z	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	1·0
·0	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
1	900	995	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
2	800	884	977	991	998	999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
3	700	774	855	945	967	983	992	996	998	999	999
4	600	663	733	810	895	923	947	965	977	984	990
5	500	553	611	675	746	824	856	885	910	931	947
6	400	442	489	540	597	659	729	761	792	822	849
7	300	332	366	405	448	495	547	605	635	665	694
8	200	221	244	270	298	330	364	403	445	470	495
9	100	111	122	135	149	165	182	201	223	246	261
1·0	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Digitized by Google

$x = 2$.

α \ z	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9	1·0
·0	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
1	982	995	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
2	936	960	980	994	999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000
3	866	899	928	953	974	989	995	997	999	999	1·000
4	779	815	849	881	911	938	960	976	985	989	992
5	677	712	748	783	817	849	880	909	931	949	961
6	561	594	627	661	695	729	762	794	824	852	877
7	435	462	490	520	550	580	611	642	673	703	732
8	298	318	339	361	384	407	432	457	482	508	533
9	153	164	175	187	200	213	227	241	256	272	288
1 0	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Løste Opgaver.

(Nyt Tidskr. for Mat. 1893, Nr. 32). Et med Vædske fyldt, fladbundet Kar af givne Dimensioner er anbragt oven over et andet lignende, men tomt Kar, som har et Hul i Bunden. Der stikkes nu et lige saa stort Hul i det øverste Kars Bund, ikke lodret over Hullet i nederste Kar.

Hvor højt stiger Vædsken i det nederste Kar? Hvor højt staar den i det Øjeblik, det øverste bliver tomt? Hvor lang Tid er der gaaet, naar det nederste atter er tomt?

Udstrømningen tænkes at følge Torricellis Lov, idet der ses bort fra Tryk paa Overfladen, Vedhængning ved Karbund og -væg og den Tid, Vædskedelen er om at falde fra det øverste til det nederste Kar. P. A. Larsen.

Løsninger:

Forudsættes Karrene at være lodrette Cylindre med samme Tværsnitsareal a, kaldes Hullets Tværsnitsareal b og er Vædskehøjden i det øverste Kar efter t Sec. x, vil der i den følgende uendelig lille Tid dt strømme en Vædskemængde $b\sqrt{2gx}\,dt$ fra det øverste Kar; synker Vædskeoverfladen derved dx, har man:

Digitized by Google

$$-adx = b\sqrt{2gx}\,dt; \quad -\frac{adx}{b\sqrt{2gx}} = dt,$$

hvoraf:

$$1. \quad -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2}{g}}\int_h^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^t dt; \quad \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{h}-\sqrt{x}) = t.$$

g er Tyngdens Acceleration og h Vædskehøjden før Udstrømningen begynder. Er Vædskehøjden i det nederste Kar efter t Sec. y og stiger Vædsken i det nederste Kar dy i Tiden dt, er Vædskemængden forøget med ady. Denne Forøgelse er lig den i Tiden dt tilflydte Vædskemængde $-adx$ formindsket med den i samme Tid bortflydte Vædskemængde $b\sqrt{2gy}\,dt$; saa at:

$ady = -adx - b\sqrt{2gy}\,dt$, indsættes $dt = -\frac{adx}{b\sqrt{2gx}}$ faas

$ady = -adx + a\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx$, hvoraf:

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} - 1.$$

Forat integrere denne Ligning, sættes $y = xv^2$, hvorved:

$$x\frac{dv^2}{dx} + v^2 = v - 1; \quad \frac{dv^2}{v^2 - v + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\frac{d(v^2 - v + 1)}{v^2 - v + 1} + \frac{dv}{v^2 - v + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

$$\int_0^v \frac{d(v^2 - v + 1)}{v^2 - v + 1} + \int_0^v \frac{dv}{v^2 - v + 1} = -\int_h^x \frac{dx}{x}.$$

$$l(v^2 - v + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2v-1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -l\frac{x}{h}.$$

$$l(v^2 - v + 1)\frac{x}{h} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{v\sqrt{3}}{2-v} = 0$$

indsættes $v = \sqrt{\frac{y}{x}}$, faas:

$$3. \quad l\frac{y - \sqrt{xy} + x}{h} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}y}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

[1]) Af Lign. 2 ses, at y bliver Maksimum for $y = x$. Indsættes dette i Lign. 3, faas:

$$l\frac{y}{h} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; \quad y = he^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

[2]) Det Øjeblik, det overste Kar bliver tomt, er $x = 0$. Indsættes $x = 0$ i Lign. 3 faas:

Digitized by Google

$$l\frac{y}{h} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}; \quad y = he^{-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

3) Det Tidspunkt, da det øverste Kar bliver tomt, faas ved at sætte $x = 0$ i Lign. 1, hvorved: $t_1 = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Ligeledes har man, naar $x = 0$:

$$-ady = b\sqrt{2gy}\,dt,$$

hvoraf:

$$-\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_{t_2}^{t_1} dt; \quad -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2y}{g}} = t_1 - t_2.$$

t_1 og t_2 er de Tidspunkter, hvor henholdsvis øverste og nederste Kar bliver tomt. Indsættes $t_1 = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ og $y = he^{-\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$ faas:

$$t_2 = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 + e^{-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}\right).$$

H. A. Birch.

5. Man skal vise Rigtigheden af følgende Udviklinger:

$$\frac{\pi-2}{16} = \frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7\cdot9} + \frac{1}{9\cdot11\cdot13} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5)}$$

$$\frac{4-\pi}{64} = \frac{1}{1^2\cdot3\cdot5^2} + \frac{1}{5^2\cdot7\cdot9^2} + \frac{1}{9^2\cdot11\cdot13^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}.$$

G. M. Stensig.

Løsninger:

1. Ved Anvendelse af Reglen for Opløsning i Partialbroker findes:

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5)} = \frac{\frac{1}{8}}{4n+1} - \frac{\frac{1}{4}}{4n+3} + \frac{\frac{1}{8}}{4n+5}, \quad (1)$$

eller skrevet lidt anderledes:

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+5}\right). \quad (2)$$

Sættes i denne Identitet efterhaanden $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ in inf., findes ved Addition af alle disse Ligninger, idet

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{\pi}{4}. \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)(4n+5)}=\frac{\pi-2}{16},$$

hvilket er den søgte Formel.

2. Angaaende den anden Udvikling, bemærker vi, at

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right) \tag{4}$$

hvorefter (2) og (4) ved Multiplikation Side for Side giver:

$$\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{(4n+1)^2}-\frac{1}{(4n+5)^2}\right)$$
$$-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+5}\right).$$

Af denne Ligning findes paa samme Maade som før og ved Anvendelse af (3) Formlen

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)(4n+5)^2}=\frac{4-\pi}{64}.$$

3. Vi bemærker i denne Forbindelse endnu, at man, dersom (1) kvadreres, finder

$$\left.\begin{aligned}\frac{64}{(4n+1)^2(4n+3)^2(4n+5)^2}&=\frac{1}{(4n+1)^2}+\frac{4}{(4n+3)^2}+\\ \frac{1}{(4n+5)^2}&-\frac{4}{(4n+1)(4n+3)}-\frac{4}{(4n+3)(4n+5)}+\frac{2}{(4n+1)(4n+5)}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

hvilken Ligning sætter os i Stand til at udlede en Rækkeudvikling for den saakaldte Catalanske Konstant:

$$G=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{(4n+1)^2}-\frac{1}{(4n+3)^2}\right).$$

Bemærkes det nemlig, at $\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$, haves

$$2\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+3)^2}=\frac{\pi^2}{8}-G.$$

Lader man nu i (5) n gennemløbe Tallene 0, 1, 2, 3, ··· in inf., finder man ved Addition af de saaledes erholdte Ligninger efter simpel Reduktion

$$G=\frac{3\pi^2}{8}-\frac{5}{2}-64\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(4n+1)^2(4n+3)^2(4n+5)^2}.$$

S. P. Sørensen.

Digitized by Google

Et Eksempel paa en Bevismetode.

Af Harald Bohr.

Ved en analytisk-talteoretisk Undersøgelse stødte jeg paa en Type af Opgaver, paa hvilke den følgende er et særlig simpelt Eksempel.

Indenfor en Cirkel C med Radius 1 — som vi for at faa simple Betegnelser vil tænke os beliggende i en kompleks z-Plan med sit Centrum i Punktet 0 — er der givet et vilkaarligt Antal Punkter $z_1, \dots z_n$, fordelt paa vilkaarlig Maade. Idet z er et variabelt Punkt indenfor C, betragter vi Middeltallet af de reciproke Afstande fra z til $z_1, \dots z_n$, altsaa Størrelsen

$$F(z) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{|z-z_1|} + \dots + \frac{1}{|z-z_n|}\right\},$$

og skal bevise, at der findes en numerisk Konstant K (iøvrigt f. Eks. Konstanten 4), saaledes at vi i alle Tilfælde (d. v. s. hvor stor n end er, og hvorledes de n Punkter $z_1, \dots z_n$ end er fordelt) kan finde et Punkt z_0 indenfor C, hvori det omtalte Middeltal $F(z_0)$ er $< K$.

Denne lille Sætning bevises maaske lettest ved følgende Fremgangsmaade, der kan benyttes overfor talrige Opgaver af lignende Art.

Funktionen $F(z)$ er defineret indenfor hele Cirklen C med Undtagelse af Punkterne $z_1, \dots z_n$. For $z \to z_r$ vil $F(z)$ vokse i det Uendelige, men saaledes at $F(z)$ forbliver $< k : |z - z_r|$, og vi kan derfor tale om Fladeintegralet af $F(z)$ udstrakt over hele Cirklen C, altsaa om Integralet

$$I = \iint_C F(z)\,dx\,dy = \frac{1}{n}\iint_C \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{|z-z_r|}\,dx\,dy = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\iint_C \frac{dx\,dy}{|z-z_r|}.$$

Nu er imidlertid Integralet under Summationstegnet mindre end en numerisk Konstant, nemlig (som man ser ved at parallelforskyde Begyndelsespunktet hen i Punktet z_r) f. Eks. mindre end Fladeintegralet af $1 : |z|$ over en Cirkel med Centrum i 0 og Radius 2, hvilket sidste Integral iøvrigt har Værdien 4π. Integralet I er altsaa $< \frac{1}{n} \cdot n \cdot 4\pi = 4\pi$. Men idet $F(z)$ er positiv indenfor hele C, og Integralet af $F(z)$ over Cirklen C (med Arealet π) er $< 4\pi$, maa Integranden $F(z)$ nødvendigvis i mindst et Punkt z_0 være $< 4\pi : \pi = 4$.

q. e. d.

Digitized by Google

Beviser for nogle Sætninger om konvekse Kurver.

Af T. Bonnesen.

1. Hjælpesætning. Naar to Linier med positive Retninger A og B og Skæringspunkt p bevæger sig saaledes, at A og B har bestemte Karakteristikpunkter a og b (d. v. s. Grænsestillingen for Skæringspunktet mellem en Linie A og dens variable Nabolinie A'), vil det geometriske Sted for p have en Tangent P, bestemt ved at $\angle AP = \angle LB$, idet L er en positiv Retning paa ab.

Lad p' være Skæringspunkt mellem A og B's Nabolinier A' og B', a' være Skæringspunkt mellem A og A', b' mellem B og B', da ligger p og p', a' og b' paa en Cirkel, fordi $\angle AB = \angle A'B'$, og man kan altsaa vælge de positive Retninger P' og L' saaledes, at $\angle AP' = L'B'$. Naar $p' \to p$, vil $a'b' \to ab = L$, og P' vil altsaa have en bestemt Grænsestilling P saaledes at $\angle AP = \angle LB$. Det er dog forudsat, at a og b ikke begge falder i p.

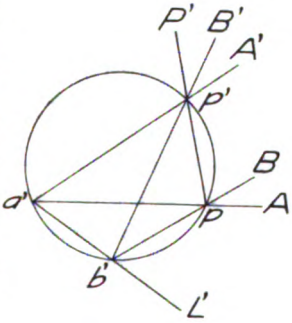


Fig. 1

Er a og b faste Punkter, bliver Stedet for p en Cirkel gennem a og b. Hvis A er Tangent til en given Kurve (a), medens B drejer sig om et fast Punkt b saaledes, at $\angle AB = \frac{\pi}{2}$, bliver Stedet for p Fodpnnktkurven til (a) med b som Pol, og Sætningen viser da, at Vinklen mellem Tangenten til Fodpunktskurven og Radius vektor fra Polen til Røringspunktet er lig Vinklen mellem Grnndkurvens Tangent og Radius vektor til dens Røringspunkt. Tænker vi os, at Grundkurven (a) har et Knækpunkt med to forskellige Halvtangenter A_1 og A_2, hvis positive Retninger vælges i Overensstemmelse med en positiv Retning paa Kurven, vil Fodpunktskurven gøre et Spring fra et Punkt p_1 til et andet p_2 ved Overgang fra A_1 til A_2. Men dette Spring kan undgaas, idet man lader Linien A dreje sig om Knækpunktet gennem $\angle A_1A_2$. p beskriver derved en Cirkelbue p_1p_2, som i Henhold til Sætningen om

Digitized by Google

Tangentens Bestemmelse gaar glat over i Fodpunktskurven i p_1 og p_2.

Ved Beviset ovenfor var det forudsat, at A og B havde bestemte Karakteristikpunkter. Hvis derimod A og B's Karakteristikpunkter er forskellige for en Bevægelse af A i positiv eller negativ Omløbsretning, finder vi, at Stedet for p kan faa forskellige Halvtangenter, som dog stadig bestemmes ved den angivne Regel. Dette vil f. Eks. finde Sted i følgende Tilfælde: Vi betragter to Støttelinier A og B til en konveks Polygon, idet vi ved en Støttelinie forstaar en Linie, som har et Punkt eller et Liniestykke fælles med Perimeteren, men iøvrigt har Polygonen liggende helt paa den ene Side af Linien. Naar A og B bevæger sig saaledes, at $\angle AB$ er konstant, vil de efterhaanden dreje sig om Vinkelspidserne, men idet A passerer en Polygonside springer Karakteristikpunktet fra en Vinkelspids til den næste, og Stedet for P, som er sammensat af Cirkelbuer, kan da faa et Knæk. Det samme gælder om Fodpunktskurven til en Polygon.

2. Vi betragter nu en Kurve (a) med bestemte Halvtangenter A i hvert Punkt a; den positive Retning paa A bestemmes i Overensstemmelse med en given positiv Retning paa Kurven. Vi bestemmer (a)'s Fodpunktskurve (p) for Polen o, idet vi for Knækkenes Vedkommende forholder os som ovenfor beskrevet. Den positive Retning B paa $op \perp A$ vælges saaledes, at $\angle AB = +\frac{\pi}{2}$. Idet X er en fast positiv Retning sættes $XB = \theta$, og $po = h(\theta)$, saaledes at Fodpunktskurven er given i polære Koordinater. Ligningen $po = h(\theta)$ kan ogsaa betragtes som Ligningen for Grundkurven (a) i tangentielle polære Koordinater. $h(\theta)$ kaldes undertiden for (a)'s Støttefunktion for Polen o. Da (p) har en bestemt Tangent P i p, maa man have $\operatorname{tg} BP = \frac{h(\theta)}{h'(\theta)}$, saa at $h'(\theta)$ eksisterer. Endvidere er $\operatorname{tg} AL = \frac{po}{ap}$, og da $\angle AL = \angle PB$, finder man, at

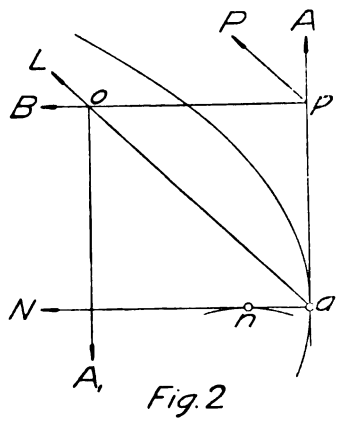


Fig. 2

Digitized by Google

$$pa = h'(\theta). \tag{1}$$

$pa = h'(\theta) = 0$, naar o ligger paa Normalen i a. (p) og (a) rører da hinanden i a.

Lad os nu forudsætte, at Normalen N til A i a har et bestemt Karakteristikpunkt n; vi kan da anvende det fundne Resultat paa Systemet N, A_1 med Skæringspunkt q, hvor $\angle NA_1 = +\frac{\pi}{2}$. Da er $qo = pa = h'(\theta)$ og følgelig $qn = h''(\theta)$, og altsaa

$$an = aq + qn = h(\theta) + h''(\theta). \tag{2}$$

Hvis den ene fra a udgaaende Bue har en bestemt Krumningsradius $\rho = \frac{ds}{d\theta}$ i a. er altsaa

$$\rho = h(\theta) + h''(\theta), \tag{3}$$

idet ρ er regnet med Fortegn. Hvis a er et Knækpunkt, vil $u = a$ under Bevægelsen fra den ene Halvtangent til den anden, og da er $h(\theta) + h''(\theta) = 0$, hvilket ogsaa følger af, at man kan sætte $h(\theta) = po = ao \sin u$, $h''(\theta) = -ao \sin u$. Sætter man $\rho = 0$, under Bevægelsen igennem Knækket, bliver derfor (3) almengyldig.

Det ovenfor fundne Udtryk $qo = h'(\theta)$ viser, at naar en Kurve har en Støttefunktion $h(\theta)$, bliver Evolutens Støttefunktion $h'(\theta)$ Evolentens Støttefunktion $\int h(\theta)\, d\theta$

3. Lad (a) være en lukket konveks Kurve, o et Punkt indenfor denne. (a) har i ethvert Punkt bestemte Halvtangenter, og $h(\theta)$ er en positiv, kontinuert, periodisk Funktion med Perioden 2π, idet h er Afstanden fra en Støttelinie til o. $h'(\theta)$ eksisterer for alle θ og har ogsaa Perioden 2π, og $h'(\theta)$ er kontinuert med mindre (a) indeholder retlinede Stykker. Hvis a og b er Endepunkterne for et saadant Stykke, vil $h'(\theta)$ for det tilsvarende θ springe fra pa til pb. Forudsættes nu, at (a) i ethvert Punkt har en bestemt Krumningsradius svarende til enhver Halvtangent, hvorved retlinede Stykker af (a) er udelukket, og sættes $\rho = 0$ under Drejning gennem Knækket faar $h''(\theta)$ bestemte Værdier, men kan være diskontinuert. Formlen (3) tillader os da at beregne Buelængden

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \rho\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} (h + h'')\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} h\, d\theta + h'(\theta) - h'(\theta_0). \tag{4}$$

Digitized by Google

For $\theta_0 = 0, \theta = 2\pi$, bliver den hele Buelængde

$$S = \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta. \tag{5}$$

Buelængden mellem to Normaler fra o svarende $\theta = \theta_0$ og $\theta = \theta_1$, bliver, da i Følge (1) $h'(\theta_0) = h'(\theta_1) = 0$,

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_1} h(\theta)\, d\theta. \tag{6}$$

Arealet f af en Sektor, som er begrænset af (a) og to Radii vektores oa_0 og oa, svarende til θ_0 og θ, er bestemt ved

$$2f = \int_{\theta_0}^{\theta} h(\theta)\, \rho(\theta)\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} h^2(\theta)\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} h(\theta)\, h''(\theta)\, d\theta,$$

$$2f = \int_{\theta_0}^{\theta} h^2(\theta)\, d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} h'^2(\theta)\, d\theta + h(\theta)\, h'(\theta) - h(\theta_0)\, h'(\theta_0).$$

Hele det af (a) begrænsede Areal F, bliver da

$$F = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h^2(\theta) - h'^2(\theta))\, d\theta, \tag{7}$$

og en Sektor mellem to Normaler til (a) bliver

$$f = \tfrac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (h^2(\theta) - h'^2(\theta))\, d\theta. \tag{8}$$

4. Ved Udledelsen af Formlerne (5)—(8) forudsatte vi ρ's Eksistens, men denne Forudsætning er, som vi nu skal vise, ikke nødvendig. Vi vil først vise Gyldigheden af Formlen (6) for en konveks brudt Linie $a_0a_1a_2a_3a_4$, idet o er Skæringspunkt mellem Normalerne i a_0 og a_4. Vinklerne mellem oa_0 og oa_1, oa_2, oa_3, kaldes u_1, u_2, u_3 og Vinklerne mellem oa_0 og de vinkelrette op_2 op_3 og oa_4 kaldes $\theta_2, \theta_3, \theta_4$. Tillige sættes $u_1 = \theta_1$. Vi betragter en Støttelinie til den konvekse Polygon $oa_0a_1a_2a_3a_4$, som drejer sig fra Stillingen a_0a_1 om Vinkelspidserne a_1, a_2, a_3 til Stillingen a_3a_4. Idet Afstanden fra Støttelinien til o som sædvanlig betegnes $h(\theta)$, ser man, at

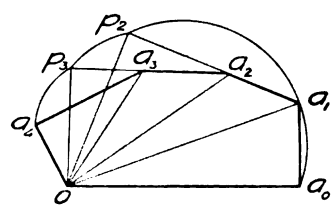


Fig. 3

Digitized by Google

$$\int_0^{\theta_1} h(\theta)\,d\theta = \int_0^{\theta_1} oa_1 \cos(\theta - u_1)\,d\theta = oa_1 \sin u_1 = a_0 a_1,$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} oa_1 \cos(\theta - u_1)\,d\theta = oa_1 \sin(\theta_2 - u_1) = a_1 p_2,$$

$$\int_{\theta_2}^{\theta_3} h(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_2}^{\theta_3} oa_2 \cos(\theta - u_2)\,d\theta = oa_2 \sin(\theta_3 - u_2) - oa_2 \sin(\theta_2 - u_2)$$
$$= a_2 p_3 - a_2 p_2,$$

$$\int_{\theta_3}^{\theta_4} h(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_3}^{\theta_4} oa_3 \cos(\theta - u_3)\,d\theta = oa_3 \sin(\theta_4 - u_3) - oa_3 \sin(\theta_3 - u_3)$$
$$= a_3 a_4 - a_3 p_3,$$

og altsaa

$$\int_0^{\theta_4} h(\theta)\,d\theta = a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4.$$

Heraf følger umiddelbart, at Længden af en konveks Polygons Perimeter er $\int_0^{2\pi} h(\theta)\,d\theta$, naar Polen er et indre Punkt.

Lad nu ab være en vilkaarlig konveks Bue, a Skæringspunktet mellem dens Normaler i a og b. Længden af Buen ab er da den lavere Grænse for Længden af en omskreven konveks brudt Linie, hvis Sider er Støttelinier til Buen, og hvis Støttelinier i a og b er vinkelrette paa oa og ob. Og $\int_{\theta_0}^{\theta_1} h(\theta)\,d\theta$, $(\theta_1 - \theta_0 = \angle\, aob)$, beregnet for Buen ab, er lavere Grænse for Integralet beregnet for enhver Støttepolygon. Følgelig angiver Integralet netop Længden af Buen ab. Dermed er Rigtigheden af Formlerne (5) og (6) vist for alle konvekse Buer.

5. Arealformlerne (7) og (8) udledes paa ganske tilsvarende Maade, idet man tager Fodpunktskurven til Hjælp. Denne er for en Polygons Vedkommende sammensat af Cirkelbuer. Bestemmer man f. Eks. (Fig. 3) $\frac{1}{2}\int_0^{\theta_1} (h^2(\theta) - h'^2(\theta))\,d\theta$, bliver $\frac{1}{2}\int_0^{\theta_1} h^2(\theta)\,d\theta$ Arealet af Sektoren oa_0a_1, medens $\frac{1}{2}\int_0^{\theta_1} h'^2(\theta)\,d\theta$ er Arealet af Segmentet begrænset af a_0a_1 og Cirkelbuen a_0a_1, idet $h'(\theta)$ jo er det Stykke, som afskæres paa Støttelinien mellem a og Fodpunktskurven. I al Almindelighed gælder det, naar oa og ob er Normaler til en konveks Bue, at $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} h^2(\theta)\,d\theta$ er Arealet af af Sektoren oab af Fodpunktskurven,

Digitized by Google

medens $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} h'^2(d\theta)$ er Arealet af den Maane, som begrænses af den givne Bue og Fodpunktskurven ab.

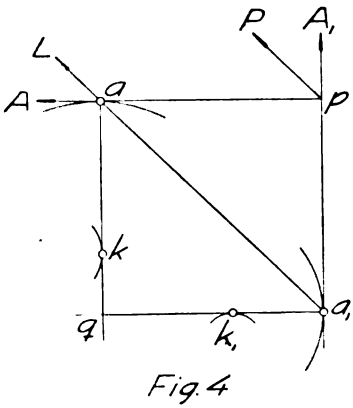


Fig. 4

6. Hjælpesætning. Lad (a) være en konveks Bue, som i hvert Punkt har bestemte Krumningsradier, bestemt paa samme Maade som tidligere. Lad A være en Støttelinie, der danner Vinklen θ med en fast Akse, og Buelængden paa (a) være $s = s(\theta)$. A skærer en given Bue (p) i p, og vi sætter $pa = r(\theta)$. Betegnes Tangenten i p ved P, er $\operatorname{tg} PA = \frac{r}{\rho - r'}$. Man finder nemlig ved en infinitetsmal Forskydning af A

$$dr = ds - d\sigma \cos PA,$$
$$rd\theta = -d\sigma \sin PA,$$

hvor $d\sigma$ er Bueelementet paa (p).

Vi betragter nu en ny konveks Bue (a_1) og en Støttelinie A_1 A til denne, og lader p være Skæringspunktet mellem A og A_1. Det geometriske Sted for p har da i Følge den første Hjælpesætning en bestemt Tangent P, for hvilken $\angle PA = \angle A_1L$ $(L = a_1a)$, og da $\operatorname{tg} A_1L = \frac{pa}{a_1p} = \frac{r}{a_1p}$, faar man, idet a_1p sættes $= r_1$,

$$r_1 = \rho - r'. \tag{9}$$

Formlen (1) er et specielt Tilfælde af denne.

Analogt er

$$r = \rho_1 + r_1', \tag{10}$$

hvilket findes umiddelbart af (9), naar man skifter positiv Retning paa Kurverne og deres Tangenter samt positiv Omløbsretning i Planen. Derved bliver $ap = r$, $pa_1 = r_1$, men $\frac{d(pa_1)}{d(-\theta)} = -r_1'$.

Forudsætter man yderligere Eksistensen af r'' og r_1'' og dermed af ρ' og ρ_1', faar man af (9) og (10) $r_1 = \rho - \rho_1' - r_1''$ og $r = \rho_1 + \rho - r''$ eller

Digitized by Google

$$\rho_1 = (r + r'') - \rho', \tag{11}$$

$$\rho = (r_1 + r_1'') + \rho_1'. \tag{12}$$

7. De fundne Formler anvendes paa en lukket konveks Kurve, som omskrives med et Rektangel af Støttelinier. Af (8) og (10) faar man med Betegnelserne paa Figuren

$r_1 = \rho_3 - r_2'$, $r_4 = \rho_3 + r_3'$,

$r_4 - r_1 = r_2' + r_3'$.

Sættes $r_2 + r_3 = b(\theta)$, hvor b er en positiv Funktion af θ med Perioden π, som angiver Kurvens Bredde i Retningen θ, er

$$r_4 - r_1 = b'. \tag{13}$$

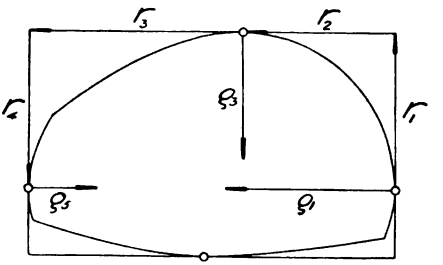


Fig. 5

(11) og (12) giver

$$\rho_1 = r_2 + r_2'' - \rho_3', \quad \rho_5 = r_3 + r_3'' + \rho_3',$$

hvoraf ved Addition

$$\rho_1 + \rho_5 = b + b''$$

eller

$$\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = b(\theta) + b''(\theta). \tag{14}$$

Af (14) findes den tilsvarende Kurves Længde

$$S = \int_0^{\pi} b(\theta)\, d\theta,$$

hvilket ogsaa kan udledes af (5).

8. Da $b(\theta)$ er en periodisk Funktion af θ, kan $b''(\theta)$ kun blive identisk 0, naar b er konstant, og man faar da af (13) og (14)

$$\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = b \quad \text{og} \quad r_1 = r_4,$$

hvilket viser, at i Kurver med konstant Bredde er Normalerne Dobbeltnormaler og lig Summen af Krumningsradierne i to modsatte Punkter med parallele Tangenter. Kurvens Evolut bliver en Dobbeltkurve i den Forstand, at Dobbeltnormalen

Digitized by Google

allerede vil have gennemløbet den efter Drejningen π. Evoluten maa være sammensat af konvekse Buer, som kan støde sammen i Spidser af første Art, og for hvilke Summen af Totalkrumningerne er π. Evolventen faar da i hvert Punkt een bestemt Krumningsradius. Man kan let danne Kurver med konstant Bredde, hvor der findes Punkter med forskellig Krumningsradius svarende til modsatte Drejninger af Normalen. Man skal da blot ikke lade de paagældende Buer af Evoluten støde sammen i en Spids, men lade Normalen være Dobbelttangent til Evoluten med adskilte Røringspunkter. Skal Evoluten have et Knækpunkt, bliver den modsatte Bue en Cirkel om Knækpunktet som Centrum.

Af (15) følger, at alle Kurver med samme konstante Bredde har samme Længde.

9. Vi vil sluttelig anvende Formlerne (13) og (14) paa konvekse lukkede Kurver med variabel Bredde, idet det forudsættes, at Liniestykkerne $r_1, r_2 \cdots$, varierer kontinuert, hvilket er Tilfældet, naar Støttepunkterne ikke gør noget Spring, det vil sige, naar der ikke findes rette Liniestykker paa Kurven. Under denne Forudsætning vil ikke alene b, men i Følge (13) ogsaa b' være kontinuert. b kan da kun blive Maksimum eller Minimum, naar $b' = 0$, altsaa naar $r_1 = r_4$, saa at de modsatte Punkter, som svarer til et Maksimum af Bredden, er Endepunkter af en Dobbeltnormal. Denne er Dobbelttangent til Evoluten.

Man kan imidlertid ogsaa faa $r_1 = r_4$, $b' = 0$ i andre Tilfælde. Da er tillige $b'' = 0$, og altsaa

$$\rho\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \rho\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = b(\theta),$$

Her træffer vi en Dobbeltnormal, hvis Krumningsscentrer falder sammen i et Røringspunkt for to Grene af Evoluten. Hertil svarer ikke nødvendigvis Maksimum eller Minimum af Bredden.

Digitized by Google

Tilføjelse til »Antik og mod. Irrationalitetsteori«.

Af T. Bonnesen.

Ved Beviset for Sætningen $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, S. 6 benyttedes Pytagoras's Sætning. Det er maaske mere naturligt og overensstemmende med den antike Proportionslære at anvende følgende Fremgangsmaade. Lad a være et vilkaarligt Liniestykke og x og y 2 Mellemproportionaler bestemt ved

$$\frac{2a}{x} = \frac{x}{a}, \qquad \frac{3x}{y} = \frac{y}{x}$$

d. v. s. $\frac{x}{a} = \sqrt{2}$, $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$. Idet Proportionerne bringes paa Formen

$$\frac{6a}{3x} = \frac{x}{a}, \qquad \frac{3x}{y} = \frac{y}{x}$$

faar man ved Multiplikation (Sammensætning af Forholdene)

$$\frac{6a}{y} = \frac{y}{a}$$

eller $\frac{y}{a} = \sqrt{6}$. Da $\frac{y}{a}$ er Produktet af $\frac{x}{a}$ og $\frac{y}{x}$, er $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Samme Fremgangsmaade kan anvendes ved n'te Rod. Grækerne bestemte f. Eks. $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ved de sammenhængende Proportioner

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{a}.$$

Her er $\frac{y}{a} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Men nu opstaar Spørgsmaalet om Eksistensen af x og y, naar a og b er givne. Ved Kvadratrod er Problemet løst ved Konstruktion af Mellemproportionalen. Ved Kubikrod kan man anvende visse rumlige Konstruktioner. Men det almindelige Spørgsmaal finder først sin Løsning i den aritmetiske Teori.

Digitized by Google

Litteraturanmeldelser.

Roberto Bonola, Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwickelung. Autorisirte deutsche Ausgabe besorgt von Prof. Dr. Heinrich Liebmann. 207 S. Zweite Auflage. 1919 (B. G. Teubner. Berlin—Leipzig.)

Siden 1. Udgave af denne Bog udkom i 1908 er der fremkommet en Del Undersøgelser paa den ikkeeuklidiske Geometris Omraade, til hvilke Udgiveren Professor *Liebmann* har taget Hensyn i den nye Udgave. Det bør fremhæves, at nogle af disse Undersøgelser skyldes Udgiveren selv. Selve Bogens Plan er imidlertid blevet bibeholdt. De tre første Kapitler giver den historiske Udvikling fra Oldtidens og Renæssancens Forsøg paa at bevise Parallelpostulatet gennem de forskellige forberedende Stadier til *Lobatschefskij*'s og *Johann Bolyai*'s fundamentale Arbeider. Lejlighedsvis gøres der dog Brud paa den historiske Fremstilling, naar det kan tjene til at lette Overblikket. Saaledes refereres i Tilslutning til *Saccheris*' Beviser for Sætningerne om den toretvinklede Firkant *Dehn*'s og *Bonola*'s ikke arkimediske Beviser for disse Sætninger. Ligeledes er *Hilbert*'s Konstruktion af Fællesnormalen til to ikke skærende og ikke parallelle Linier medtaget her. Overalt i denne Oversigt er der gjort Rede for de Forudsætninger, som de enkelte Forskere bygger paa. I 4. Kapital gives der en samlet Fremstilling af den elementære hyperbolske Geometri. I den sfæriske Geometri kan man som bekendt udlede alle den retvinklede Trekants Formler af en af disse ved Hjælp af fem sammenhørende Trekanter (pentagramma mirificum), og *Lobatschefskij* har for sin Geometris Vedkommende fundet en analog Fremgangsmaade, idet han til en vilkaarlig retvinklet Trekant lader svare en vis treretvinklet Firkant og finder Relationer mellem disses Stykker og tilsvarende Parallelvinkler. Hertil anvender han rumlige Betragtninger, men *Liebmann* har vist, at de nødvendige Konstruktioner kan udføres i Planen alene paa en meget simpel Maade. Af disse sammenhørende Figurer udledes, som *Engel* har vist, Parallelkonstruktionen i den hyperbolske Plan. Et direkte Bevis for denne Konstruktion har *Liebmann* fremsat andetsteds (Leipzig Ber. Ges. Wiss. 62, 1910). De hyperbolske trigonometriske Funktioner ind-

Digitized by Google

føres ved Hjælp af Fundamentalligninger paa Grundlag at Grænsecirklen. Endelig behandler dette Kapitel den elliptiske og den sfæriske Geometri efter *Liebmann*'s egen Fremstilling.

De forskellige Afbildninger paa det euklidiske Rum gennemgaas i 5. Kapitel, og Bogen sluttes med et Tillæg, hvori Professor *L. Schlesinger* giver en interessant Oversigt over de funktionsteoretiske Undersøgelser, som har Tilknytning til de ikkeeuklidiske Geometrier.

Det er saaledes et betydeligt Stof, som behandles i denne lille Bog, og for Begyndere vil den den derfor trods den klare Fremstilling ikke være helt let at læse. Men Studiet af den vil virke meget ansporende, idet den giver Anledning til at tage Spørgsmaal af forskellig Natur op til Behandling.

T. Bonnesen.

* * *

C. W. Oseen. Atomistiska Föreställningar i Nutidens Fysik, — Tid, Rum och Materie. — Femton Föreläsninger, 201 S. Stockholm, Albert Bonniers Förlag. 1920. Pris 9 Kr.

Den ansete Professor i teoretisk Fysik ved Upsala Universitet *C. W. Oseen* har i Bogform udgivet 15 Forelæsninger, som han har holdt i Sommeren 1919, i hvilke der i store Træk gennemgaas nogle af de vigtigste Kapitler i den moderne teoretiske Fysik. Den Maade, paa hvilken Stoffet er behandlet, er ikke alene egnet til at holde Læserens Interesse vaagen fra Begyndelsen til Enden, men naar Vanskeligheden ved de behandlede Emner tages i Betragtning, maa Fremstillingen tillige kaldes klar og let forstaaelig, ogsaa for saadanne Læsere, som ikke er hjemme i Anvendelsen af de matematiske Hjælpemidler, som Nutidens teoretiske Fysik benytter sig af.

I de første 10 Forelæsninger omtales de vigtigste fysiske Fænomener, som hænger direkte sammen med Materiens atomistiske Struktur; kun Radioaktivitetens Omraade, og hvad der hænger sammen dermed, bliver ikke berørt. Den første Forelæsning danner en Indledning til de følgende og er i høj Grad fængslende. Den indeholder bl. a. en kort historisk Oversigt over de atomistiske Teoriers Udvikling i det sidste Aarhundrede, og vidner om Begejstring for de mange nye Opdagelser, som de senere Aar har bragt, og som ikke alene har fastslaaet Atomernes Eksistens, men ogsaa har lært os mange af deres Egenskaber at kende. Og det vil glæde danske Læsere, naar

Digitized by Google

Forfatteren i Slutningen af Indledningen siger: »av alt det vackra, som jag i dessa Föreläsninger skall tala om är den *Bohr'ska* atomteorien det vackraste«.

Bortset fra det Kendskab til Atomerne, der kan hentes fra Kemien, maa det siges, at den første teoretiske Behandling af atomistiske Spørgsmaal, som har vist sig frugtbar, blev givet i den kinetiske Luftteori, som er udviklet og uddybet ved Østrigeren *Boltzmann*'s Undersøgelser. Dette har sin simple Forklaring i den Omstændighed, at Atomerne er saa smaa, at vi i Almindelighed kun har at gøre med Fænomener, hvor Systemer af et overordentligt stort Antal Atomer spiller en Rolle. Forfatteren giver derfor i de første Forelæsninger en Oversigt over nogle af de vigtigste Resultater i den kinetiske Luftteori og gaar derved lidt nærmere ind paa den Maade, hvorpaa det har været *Boltzmann* muligt teoretisk at tyde Entropibegrebet og at fastslaa Forbindelsen mellem Entropien og Sandsynligheden for et System bestaaende af mange Atomer eller Molekyler. Matematikere faar derved Lejlighed til at lære den overordentlig frugtbringende og anskuelige Anvendelse at kende, som *Boltzmann* har gjort af Rum med et uhyre stort Antal Dimensioner.

Derefter gennemgaas de vigtige Forsøg af *Perrin* og andre over Egenskaberne ved smaa Partikler, som er suspenderet i en Vædske, hvilke Forsøg har været en saa væsentlig Støtte for den kinetiske Luftteoris Resultater. Og en særlig Forelæsning er viet Beviserne for Elektronernes Eksistens, hvorunder ogsaa *Millikan*'s berømte Forsøg bliver behandlet.

De sidste Forelæsninger i Bogens første Del handler om den saakaldte Kvanteteori. Der gives bl. a. en klar og overskuelig Diskussion af de Forsøg, som er gjort for at give en teoretisk Forklaring af Varmestraalingsloven og af den Maade, paa hvilken *Planck* blev ført til sine »Energikvanta«. Endvidere giver Forfatteren en kort Oversigt over Hovedpunkterne i den *Bohr'ske* Atomteori og over de vidunderlige Overensstemmelser med Erfaringen, til hvilke denne allerede har ført for saa mange Fænomeners Vedkommende, en Overensstemmelse, som særlig med Hensyn til Brintens og Heliums Spektrer er kvantitativt nøjagtigere, end hvad andre fysiske Teorier nogensinde har kunnet opvise. Maaske kunde det siges, at Forfatteren her giver for mange Formler og Regninger og for lidt Fysik; men af et Omraade, som er saa nyt som

Digitized by Google

dette, og hvor det i enhver fysisk Teori tilstræbte Enheds-billede langtfra er naaet, er det naturligvis vanskeligt allerede nu at give en Beskrivelse, som tilfredsstiller alle.

Bogens anden Del, som bærer Undertitlen »Tid, Rum ock Materie«, indeholder i fem Forelæsninger en Oversigt over Hovedpunkterne i *Einsteins* specielle og almindelige Relativitets-teori. Her vil jeg særlig fremhæve den første Forelæsning »I hvilken Mening kan Rummet sägas vara krökt?«, hvori der gives en meget elegant og smuk Diskussion af de saa interessante Spørgsmaal angaaende vort tredimensionale fysiske Rums »Geometri«, som paa Grund af *Einstein*'s Teorier er blevet aktuelle, d. v. s. Spørgsmaalet om Rummet er euklidisk eller ikkeeuklidisk, endeligt eller uendeligt, og om hvad man egentlig fra et fysisk Standpunkt skal forstaa ved disse Udtryk.

Til alle, som har nogle matematiske Forkundskaber, og som gerne vil vide lidt nærmere om den Vej, paa hvilken den teoretisk-fysiske Forskning befinder sig for Øjeblikket, kan Bogen anbefales paa det varmeste saavel for Indholdets Skyld som paa Grund af den personlige Stil, hvoraf den er præget.

H. A. Kramers.

Danske Eksamensopgaver.

Skoleembedseksamen ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet. Juni 1920.

I. Del.

I.

1. I dobbelt Projektion er givet to vandrette Linier A og B, paa den ene et Punkt a, paa den anden et Punkt b. Find Centrum og Radius i den Kugle, som berører de to Linier i a og b.

2. Find i et retvinklet Koordinatsystem Ligningen for en ret Konoide, hvis rette Ledelinie er Z-Aksen, medens Ledekurven har Ligningerne

$$x^2 + y^2 = y, \quad z = 2x.$$

Find Ligningen for Tangentplanen i det Punkt af Fladen, hvis x-Koordinat $= 2$, og hvis y-Koordinat $= 1$. Vis, at denne

Digitized by Google

Tangentplan indeholder en af Fladens rette Linier, samt at den desuden skærer Fladen i en Ellipse.

Løsning.

1. Centrums vandrette Billede er Skæringspunkt mellem de vinkelrette paa A_v og B_v, oprejste i a_v og b_v. Dernæst benyttes, at Centrum ligger i en Plan vinkelret paa Midten af ab.

2. Konoidens Ligning er

$$z(x^2 + y^2) = 2xy.$$

Tagentplanens Ligning

$$6x - 12y + 25z = 20.$$

Tangentplanen indeholder Linien

$$z = \tfrac{4}{5}, \quad x = 2y.$$

For at finde Skæringskurven med Fladen elimineres z, og man faar:

$$(x^2 + y^2)(20 - 6x + 12y) = 50xy$$

eller

$$10(x^2 + y^2) - 25xy - 3(x - 2y)(x^2 + y^2) = 0,$$

der deler sig i

$$x - 2y = 0$$

og

$$10x - 5y - 3(x^2 + y^2) = 0.$$

Den sidste Ligning giver en Ellipse.

II.

1. Find under reel Form det til den ikkehomogene lineære Differentialligning

$$\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^3y}{dx^3} = x$$

svarende fuldstændige Integral.

2. Udtryk Potenssummerne S_m af Rødderne i den algebraiske Ligning af Graden np

$$a_0x^{np} + a_1x^{(n-1)p} + \cdots + a_rx^{(n-r)p} + \cdots + a_{n-1}x^p + a_n = 0.$$

alene ved Potenssummerne s_m af Rødderne i den algebraiske Ligning af Graden n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_rx^{n-r} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Digitized by Google

3. Bevis, at Rækken med positive Led Σu_n altid er divergent, naar $\lim(nu_n)$ eksisterer og ikke er Nul, og anvend denne Sætning paa Rækken med det almindelige Led $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Løsning.

1. Det fuldstændige integral bliver

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x + \frac{x^4}{24}.$$

2. Anvendes Newtons formler, faas umiddelbart $S_m = 0$, naar m ikke er delelig med p, og $S_{rp} = pS_r$.

Betegner $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ rødderne i den sidste ligning, $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ rødderne i den binome ligning $x^p = 1$, faar den første ligning de np rødder

$$\alpha_r^{\frac{1}{p}}\varepsilon_1,\ \alpha_r^{\frac{1}{p}}\varepsilon_2,\cdots,\ \alpha_r^{\frac{1}{p}}\varepsilon_p, \qquad r = 1, 2, 3\cdots, n,$$

og altsaa haves

$$S_m = (\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_p^m)\left(\alpha_1^{\frac{m}{p}} + \alpha_2^{\frac{m}{p}} + \cdots + \alpha_n^{\frac{m}{p}}\right),$$

hvoraf man straks udleder de angivne Resultater.

3. Sættes $\lim(nu_n) = 2k$, maa k være positiv, og altsaa eksisterer der et saadant positivt helt tal N, at man for $n \geqq N$ f. eks. bestandig har $nu_n > k$. Derved findes

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} > k\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p}\right),$$

og altsaa er rækken divergent, fordi den harmoniske række er det.

I eksemplet findes

$$\lim(nu_n) = \lim \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1,$$

og rækken er følgelig divergent.

III.

1. En tynd cirkelformet tung Ring med Radius a har sin Masse fordelt saaledes, at Tætheden er proportional med Afstanden fra et fast Punkt paa Ringens Periferi. Find Ringens Tyngdepunkt. Ringen skal lægges saaledes, at den hviler paa Overfladen af en fast glat Kugle med Radius $2a$. Hvilken Vinkel maa Ringens Plan danne med den vandrette Plan?

Digitized by Google

2. Tre ens, tynde homogene tunge Stænger af Længde a er sat sammen saaledes, at de danner en uforanderlig ligesidet Trekant. Systemet kan frit dreje sig om en fast vandret Akse gennem Trekantens ene Vinkelspids og vinkelret paa Trekantens Plan. Trekanten begynder at svinge, udgaaende fra en Stilling, hvor den ene Side er vandret, uden Begyndelseshastighed, idet den ikke paavirkes af andre ydre Kræfter end Tyngdekraften. Find den største Vinkelhastighed, Systemet faar under Bevægelsen.

Løsning.

1. Ringens Masse

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi} \mu \cdot 2a \cos\theta \cdot 2a d\theta.$$

Momentsum med H. t. Y-Aksen

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi} \mu \cdot 2a \cos\theta \cdot 2a \cos^2\theta \cdot 2a d\theta.$$

Tyngdepunktets x-Koordinat er da

$$\xi = 2a \cdot \frac{\int_0^{\pi} \cos^3\theta d\theta}{\int_0^{\pi} \cos\theta \, d\theta} = \frac{4a}{3}.$$

Vinklen α med den lodrette Linie bestemmes ved

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a \sin 60^0}{\frac{4a}{3} - 2a \cos 60^0} = 3\sqrt{3}.$$

2. Inertimomentet med H. t. Drejningsaksen er $\frac{1}{2} ma^2$, hvor m er hele Trekantens Masse. Altsaa er

$$\frac{1}{4} ma^2\omega^2 = mg \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{a\sqrt{3}},$$

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{4g^2}{3a^2}}.$$

Digitized by Google

II Del (ældre Ordning).

I.

1. Bestem Konvergensomraadet for den uendelige Række

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (x^2 + x)^n,$$

og undersøg Rækken paa Konvergensgrænsen. Find dernæst Rækkesummen $f(x)$, og bestem Koefficienterne i den Potensrække, der fremstiller $f(x)$ i Omegnen af Begyndelsespunktet, baade direkte og ved Anvendelse af den givne Udvikling. Hvilke numeriske Relationer kan man derved udlede?

2. I et Trekantskoordinatsystem er givet to Keglesnit med Ligningerne

$$x_2 x_3 + 3x_3 x_1 + 4x_1 x_2 = 0,$$
$$3x_2 x_3 - x_3 x_1 - 8x_1 x_2 = 0.$$

Bestem Indhyllingskurven for de rette Linier, der skærer de to Keglesnit i harmonisk forbundne Punktpar.

Løsning.

1. Konvergensomraadet bestemmes ved $|x \cdot (x+1)| < 1$, og Rækken er følgelig konvergent i det indre af en Cassinis Ellipse med brændpunkterne $(0, 0)$ og $(-1, 0)$. Sættes $x = u + iv$, faar denne ellipse ligningen

$$(u^2 + v^2)((u+1)^2 + v^2) = 1.$$

Da den forelagte række er en kvotiensrække med kvotienten $-(x^2 + x)$, kan den aldrig konvergere paa konvergensgrænsen, men oscillerer mellem endelige grænser undtagen for $x^2 + x = -1$ altsaa $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, hvor rækken er egentlig divergent.

Man finder, i ovennævnte konvergensomraade,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{1 - x}{1 - x^3};$$

sættes altsaa

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a^n x^n + \cdots,$$

faar denne potensrække konvergensradius 1, og man finder af ovenstaaende udtryk for $f(x)$, idet man multiplicerer kvotientrækken, dannet af $(1 - x^3)^{-1}$, med $1 - x$

Digitized by Google

$$a_{3n} = 1, \quad a_{3n+1} = -1, \quad a_{3n+2} = 0.$$

Bemærkes det, at den forelagte række er ligelig konvergent for $x^2 + x \leq 1 - \delta$, og anvendes en bekendt sætning af Weierstrass, faas for alle n

$$a_n = (-1)^n \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s},$$

og de omtalte numeriske relationer findes ved at sætte disse udtryk for a_n lig med de foregaaende.

2. En ret Linie (u_1, u_2, u_3) har ligningen

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

Skæringspunkterne med de to Keglesnit bestemmes ved

$$-(x_2 + 3x_1)(u_1 x_1 + u_2 x_2) + 4u_3 x_1 x_2 = 0,$$

og

$$-(3x_2 - x_1)(u_1 x_1 + u_2 x_2) - 8u_3 x_1 x_2 = 0.$$

Eller:

$$-3u_1 x_1^2 + (4u_3 - u_1 - 3u_2) x_1 x_2 - u_2 x_2^2 = 0,$$

og

$$u_1 x_1^2 + (u_2 - 3u_1 - 8u_3) x_1 x_2 - 3u_2 x_2^2 = 0.$$

Betingelsen for, at de herved bestemte Punktpar er harmonisk forbundne, er:

$$9u_1 u_2 - u_1 u_2 - \tfrac{1}{9}(4u_3 - u_1 - 3u_2)(u_2 - 3u_1 - 8u_3) = 0.$$

Ordnes denne Ligning, faar man den søgte Kurves Ligning i Liniekoordinater:

$$3u_1^2 - 3u_2^2 - 32u_3^2 - 8u_1 u_2 + 28u_2 u_3 - 4u_1 u_3 = 0,$$

der let føres over i Punktkoordinater.

II.

1. Bestem de algebraiske Funktioner $f(x) = A(u, v) + iB(u, v)$ af den komplekse Variable $x = u + iv$, for hvilke $A(u, v) = \varphi(u) \cdot \psi(v)$.

2. Idet p er et ulige Primtal, skal man bevise, at i hvert Fald en af de ubestemte Ligninger

$$p^3 x^2 \pm 2x = y^2$$

tilfredsstilles af uendelig mange hele Værdisæt af x og y.

Digitized by Google

3. Idet $f(x)$ er et helt Polynomium højst af Graden $n-1$ i x, medens C betegner Omkredsen af en Cirkel med Centrum i Begyndelsespunktet og en Radius større end det positive hele Tal n, skal man bevise Formlen

$$\int_C \frac{f(x+\alpha)\,dx}{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} = 0,$$

hvor α er en vilkaarlig Konstant.

Løsning.

1. Laplaces differentialligning giver

$$\varphi''(u)\,\psi(v) + \varphi(u)\,\psi''(v) = 0, \quad \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} + \frac{\psi''(v)}{\psi(v)} = 0,$$

og altsaa haves

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = \pm k^2, \quad \frac{\psi''(v)}{\psi(v)} = \mp k^2,$$

hvor k er en reel konstant; da $k \neq 0$ medfører, at baade $\varphi(u)$ og $\psi(v)$ bliver transcendente, haves derfor $k = 0$, hvoraf

$$\varphi(u) = au + b, \qquad \psi(v) = a_1 v + b_1,$$

hvor de fire arbitrære konstanter maa være reelle.

Betingelserne

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial u} = a(a_1 v + b_1), \quad \frac{\partial B}{\partial u} = -\frac{\partial A}{\partial v} = -a_1(au + b)$$

giver da

$$B(u, v) = -\frac{aa_1}{2}(u^2 - v^2) + ab_1 v - a_1 bu + c,$$

hvor c er en ny reel konstant, og altsaa findes

$$f(x) = A(u, v) + iB(u, v) = -\frac{iaa_1}{2}x^2 + (ab_1 - ia_1 b)x + ic.$$

2. Multipliceres med p^3, omskrives ligningen til

$$(p^3 x \pm 1)^2 - p^3 y^2 = 1,$$

saaledes at man føres til den uhestemte ligning

$$u^2 - p^3 v^2 = 1,$$

Digitized by Google

der tilfredsstilles af uendelig mange hele værdisæt af u og v. Da p nu er et ulige primtal, haves

$$u \equiv \pm 1 \pmod{p^3}: \quad u = p^3 x \pm 1, \quad y = v.$$

3. Da integranden ikke har andre endelige singulariteter end de simple poler $0, 1, 2, \cdots, n$, og da residuet svarende til polen r er

$$\lim_{x=r} \frac{(x-r)f(x+\alpha)}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \frac{(-1)^{n-r} f(\alpha+r)}{n!}\binom{n}{r},$$

bliver integralet, bortset fra faktoren $2\pi i$, lig med n^{te} differens af $f(\alpha)$ og har følgelig værdien 0, fordi $f(\alpha)$ er et helt polyminium, hvis grad ikke overstiger $n-1$.

Til dette resultat kommer man ogsaa let ad anden vej.

Sættes $f(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \cdots + a_r$, hvor altsaa $0 \leqq r \leqq n-1$, og betegner C en fast cirkel med centrum i begyndelsespunktet og en radius større end n, medens C_1 er en dermed koncentrisk cirkel med den vilkaarlig store radius R, bliver integralerne langs C og langs C_1 ligestore. Sættes ved den sidste integration $x = Re^{i\theta}$, faas altsaa

$$\int_C \frac{f(x+\alpha)\,dx}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \frac{i}{R^{n-r}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{a_0 + \delta}{1 + \delta_1} e^{i\theta} d\theta,$$

hvor $|\delta|$ og $|\delta_1|$ er vilkaarlig smaa. Da nu det første integral ikke afhænger af R, maa det have værdien 0.

II Del (ældre Ordning) og III Del (ny Ordning).

III.

1. En Omdrejningskegle, hvis halve Toppunktsvinkel er 30°, og hvis Grundflade har Radius r, ruller paa en vandret Plan uden at glide. Den relative Rotation omkring Keglens Akse foregaar med konstant Vinkelhastighed ω. Find Accelerationen i den absolute Bevægelse for det øverste Punkt paa Grundfladens Periferi.

2 En tynd Plade kan frit dreje sig om et fast Punkt, der falder sammen med Pladens Tyngdepunkt. Pladen sættes i Bevægelse paa vilkaarlig Maade og paavirkes ikke af andre Kræfter end Tyngdekraften. Vis, at den Vektor, der fremstiller den øjeblikkelige Vinkelhastighed, under hele Bevægelsen har konstant Projektion paa Pladens Plan.

Løsning.

1. Medføringsbevægelsen er en Rotation $\frac{1}{2}\omega$ omkring den lodrette Linie gennem Keglens Toppunkt. Den relative Bevægel-

Digitized by Google

ses Acceleration er $= r\omega^2$. Medføringsbevægelsens Acceleration $= r \cdot (\frac{1}{2}\omega)^2$. Den Acceleration, den relative Hastighed faar paa Grund af Medføringsbevægelsen, er $r\omega \cdot \frac{1}{2}\omega$ og rettet samme Vej som Medføringsaccelerationen. Altsaa bliver den absolute Accelerations Komposanter efter X-Aksen (Røringsfrembringeren) og Z-Aksen den lodrette Linie gennem Keglens Toppunkt):

$$x'' = \tfrac{1}{2} r\omega^2 - \tfrac{1}{4} r\omega^2 - 2 \cdot r\omega \cdot \tfrac{1}{2}\omega = -\tfrac{3}{4} r\omega^2,$$

$$z'' = -r\omega^2 \cdot \sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} r\omega^2.$$

Heraf faas Accelerationens Størrelse $= \frac{\sqrt{21}}{4} r\omega^2$.

2. Med de sædvanlige Betegnelser har man

$$Ap^3 + Bq^3 + Cr^3 = D\mu^2,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^3.$$

Her er nu $C = A + B$, og ved Elimination af r af de to Ligninger faar man:

$$AB(p^2 + q^2) = \text{const.}$$

d. v. s.

$$p^2 + q^2 = c^2,$$

hvorved Sætningen er bevist.

III. Del.

Angiv en Metode til Bestemmelse af et Fundamenttalsystem af partikulære Integraler svarende til den homogene lineære Differentialligning af n^{te} Orden

$$x^n\varphi_0(x)y^{(n)} + x^{n-1}\varphi(x)y^{(n-1)} + \cdots + x^{n-p}\varphi_p(x)y^{(n-p)} + \cdots + \varphi_n(x)y = 0,$$

hvor Koefficienterne $\varphi_p(x)$ alle er analytiske Funktioner i Omegnen af Begyndelsespunktet, og hvor den determinerende Ligning netop er af n^{te} Grad.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1920.
For Maskin-Bygnings- og Elektroingeniører.

Matematik.

I.

1. Bestem de 9 Koefficienter α_{rs} i en ortogonal Substitution

$$x = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1 + \alpha_{13}z_1,$$
$$y = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1 + \alpha_{23}z_1,$$
$$z = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}y_1 + \alpha_{33}z_1,$$

som fører den kvadratiske Form

Digitized by Google

$$-4x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 4yz - 16zx + 20xy$$

over i en ny kvadratisk Form

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + 2b_{23}y_1z_1 + 2b_{31}z_1x_1 + 2b_{12}x_1y_1.$$

hvori de 3 Produktkoefficienter b_{23}, b_{31}, b_{12} alle er 0. Angiv endvidere Kvadratkoefficienterne b_{11}, b_{22}, b_{33} i den reducerede Form.

2. Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$(x - 2y)\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Bestem dernæst den partikulære Integralkurve, der gaar gennem Punktet $(x, y) = (0, 1)$, samt skitser paa en Figur, hvorledes den partikulære Integralkurve, der gaar gennem Punktet $(x, y) = (1, 0)$, forløber i Halvplanen til højre for Ordinataksen.

Løsninger.

1. Ved Substitutinen

$$x = \tfrac{1}{3}(x_1 + 2y_1 - 2z_1),$$
$$y = \tfrac{1}{3}(2x_1 - 2y_1 - z_1),$$
$$z = \tfrac{1}{3}(2x_1 + y_1 + 2z_1),$$

reduceres Formen til

$$-18y_1^2 + 9z_1^2.$$

2. Retlinet Integralkurve gennem Begyndelsespunktet: $x = 0$.
Fuldstændigt Integral: $2y = cx - x\sqrt{1 + x^2}$.
Partikulært Integral gennem $(1, 0)$: $2y = -x\sqrt{x}$.

Matematik.

II.

1. Vis, at Fladen

$$z = 2y^4 + 11x^2 + 11y^2 - 14xy + 2$$

ligger helt over Fladen

$$z = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 12.$$

Find endvidere Volumen af det Omraade, der er begrænset af de to Flader og den rette cirkulære Cylinderflade, hvis Radius er 1, og hvis Akse er den Linie parallel med Z-Aksen, hvorpaa der mellem Fladerne afskæres det korteste Stykke.

Digitized by Google

2. Find Arealet af den Del af Ellipsoiden

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1,$$

der ligger indenfor Cylinderfladen

$$y^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Løsninger.

1. Differensen $u = 2y^4 + 9x^2 + 9y^2 - 12xy + 14$ har Minimum 14 i Punktet $(x, y) = (0, 0)$. Volumen bliver $\frac{7}{4}^5\,\pi$.

2. Man finder Arealet lig med

$$4\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin v \sqrt{4 - 3\cos^2 v}\, dv = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{7}}{16} - \mathit{Arc}\sin\tfrac{3}{4} \right).$$

Deskriptiv Geometri.

Dobbelt retvinklet Afbildning. 4 Punkter a, b, c, d er givet ved deres lodrette og vandrette Billede saaledes, at Linien ad er parallel med lodret Billedplan. Den brudte, vindskæve Linie $abcd$ frembringer en Omdrejningsflade ved Rotation om ad som Omdrejningsakse.

Bestem baade Fladens lodrette og dens vandrette Kontur ved at ***konstruere*** Endepunkterne af de Linie- eller Buestykker, hvoraf Konturerne er sammensat. Ellipser bestemmes ved deres Toppunkter, Hyperbler ved Toppunkter og Asymptoter.

Løsning.

Fladen er sammensat af to Kegleflader og en Hyperboloide. Man finder umiddelbart Keglernes lodrette Kontur, og Hyperboloidens Kontur er en Hyperbel, hvis Toppunkter og Asymptoter bestemmes ved Projektion paa en Plan vinkelret paa Aksen. Vandret Billede af Keglernes Grundcirkler er Ellipser, hvis Toppunkter straks findes, Keglernes vandrette Konturfrembringere bestemmes ved lodrette Tangentplaner, idet man finder Sporet i Grundfladen for en lodret Linie gennem Toppunktet og fra dette Spor trækker Tangenten til Grundcirklens Nedlægning i Frontmeridianplanen. Paa samme Maade findes Konturfrembringerne til Asymptotekeglen. Disse er Asymptoter til den vandrette Konturhyperbel. De Punkter, hvor denne og Ellipsen støder sammen, er Projektioner af Skæringspunkterne mellem Grundcirklerne og den Diametralplan til Hyperboloiden, som er konjugeret med

Digitized by Google

den lodrette Diameter. Denne Plan er vinkelret paa lodret Billedplan og halverer det Stykke, som afskæres paa en vilkaarlig lodret Linie i Frontmeridianplanen mellem Asymptoterne til lodret Kontur.

Opgaver til Løsning.

6. Hvilken Kurve skal rulle paa et Keglesnit, naar et Punkt i fast Forbindelse med Kurven skal beskrive samme Keglesnit?

K. W. Johansen.

Bøger tilsendte Redaktionen.

Paul Bachmann: Das Fermat-problem in seiner bisherigen Entwickelung. 100 S. 1919 (Vereinigung wissenschaftliger Verleger, Walter de Gruyter & Co. Berlin und Leipzig).

H. Lacaze: Cours de cinématique théorique. 138 p. 1920 (Gauthier-Villars et Cie. Paris.)

Georges Giraud: Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré. 126 p. 1920 (Gauthier-Villars et Cie, Paris.)

E. Bally: Géométrie synthétique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre. 100 p. 1920. (Gauthier-Villars et Cie. Paris).

C. Neumann: Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben. 352, S. 1920. (Abhandlungen der math.-phys. Klasse der sächsischen Akad. der Wiss. B. G. Teubner).

Émile Borel: Die Elemente der Mathematik. Besorgt v. Paul Stäckel. 2. Bd. Geometrie, 2. Auflage. 380 S. 1920. (B. G. Teubner).

Gunnar Jahn: Statistikkens Teknik og Metode. 257 S. 1920. (H. Aschehoug & Co. Kristiania).

Digitized by Google

MATEMATISK TIDSSKRIFT

B

UDGIVET AF

MATEMATISK FORENING I KØBENHAVN

REDIGERET AF

HARALD BOHR **T. BONNESEN**

AARGANG 1921

Udgået af Studenterforeningens Bibliotek

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: JUL. GJELLERUPS FORLAG
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (IVAR JANTZEN)
1922

Digitized by Google

Digitized by Google

INDHOLD.

Side

Bohr, H., Dr. phil, Prof. ved polyt. Læreanstalt: Nogle Bemærkninger om de Dirichletske Rækkers ligelige Konvergens 51
— Se Opgaver til Løsning.
Bonnesen, T., Dr. phil., Prof. ved polyt. Læreanstalt: Bevis for Sætningen, at Cirklen har et større Areal end enhver anden Figur med samme Perimeter, med en Skærpelse af den isoperimetriske Ulighed og en Anvendelse paa konvekse Legemer 1
— Cirklens isoperimetriske Ulighed paa Kuglefladen . . . 48
Fog, D., cand. mag., Assistent ved Universitetet: Litteraturanmeldelse.
Hjelmslev, J., Dr. phil., Prof. ved Universitetet: Tre Foredrag over Geometriens Grundlag:
I. Den rette Vinkel 25
II. Kongruens 95
Kobbernagel, P., Dr. phil.: Litteraturanmeldelse.
Nielsen, J., Dr. phil., Docent ved Landbohøjskolen: Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien 77
— Litteraturanmeldelse.
Polya, G., Dr. phil., Professor i Zürich: En funktionsteoretisk Bemærkning. Uddrag af et Brev fra Professor Polya. (Med nogle indledende Bemærkninger af H. Bohr). . . 14
— Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen 16

OPGAVER TIL LØSNING.

Nr. 7. H. Bohr 124

EKSAMENSOPGAVER.

Skoleembedseksamen 22, 63
1. Del af polyteknisk Eksamen 75, 121

LITTERATURANMELDELSER.

Lacaze, H.: Cours de Cinématique théorique (D. Fog) . . 22
Klein, Felix: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Erster Band (J. Nielsen) 55
Bally, E.: Géométrie analytique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre (P. Kobbernagel) 121

Bøger tilsendt Redaktionen 124

Digitized by Google

Digitized by Google

Bevis for Sætningen, at Cirklen har et større Areal end enhver anden Figur med samme Perimeter, med en Skærpelse af den isoperimetriske Ulighed og en Anvendelse paa konvekse Legemer.

Af T. Bonnesen.

Lad der være givet en Kurve, som har en bestemt Længde p, og som indeslutter et bestemt Areal f. Arealet af den Cirkel, som har samme Perimeter, er $\frac{p^2}{4\pi}$, og den oven anførte Sætning kan da udtrykkes ved Uligheden

$$\frac{p^2}{4\pi} - f > 0. \tag{1}$$

Denne Ulighed skal vises at være rigtig for alle andre Kurver end Cirklen.

I det følgende er der foreløbig kun Tale om en konveks Polygon med Perimeter p og Areal f. Til Hjælp ved Undersøgelsen ligger det nær at benytte Polygonens konvekse Parallelkurve, som er den ydre Indhyllingskurve for en Cirkel med konstant Radius ρ, hvis Centrum gennemløber Polygonens Perimeter. Denne Kurve er sammensat af rette Liniestykker, nemlig de Stykket ρ parallelforskudte Polygonsider, og af Cirkelbuer med Radius ρ og Centrer i Vinkelspidserne. Disse Buer udgør tilsammen en hel Cirkel. Kaldes Kurvens Perimeter P, dens Areal F, er

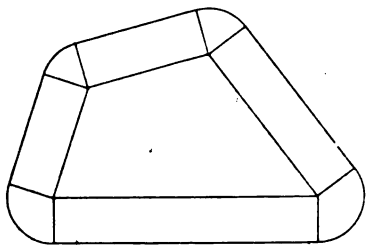


Fig. 1.

$$P = 2\pi\rho + p \tag{2}$$

$$F = \pi\rho^2 + \rho p + f. \tag{3}$$

Herved finder man

Digitized by Google

$$\frac{P^2}{4\pi} - F = \frac{p^2}{4\pi} - f. \tag{4}$$

Værdien af venstre Side er altsaa uafhængig af ρ. For $\rho = \frac{p}{2\pi}$ er $P = 0$, medens F antager sin Minimumsværdi, som er lig Udtrykket paa højre Side af (4) med modsat Fortegn. Den stillede Opgave er altsaa den samme som at vise, at Minimum af F er negativ, eller, hvad der er tilstrækkeligt, at F, som jo er positiv for positive Værdier af ρ, overhovedet kan blive negativ for en negativ Værdi af ρ. For Overblikkets Skyld vil vi erstatte ρ med $-\rho$ og skifte Fortegn for F, og vi kan da formulere Opgaven saaledes:

Kan man for enhver given konveks Polygon angive en geometrisk bestemt positiv Værdi af ρ, for hvilken Funktionen

$$\varphi = \rho p - f - \pi\rho^2 \tag{5}$$

er positiv?

Man kan nu straks angive en Klasse af Polygoner, hvor dette lader sig gøre, nemlig de Polygoner, som kan omskrives om en Cirkel. Kaldes Cirklens Radius r, og sættes $\rho = r$, bliver $rp = 2f$, og $rp - f - \pi r^2 = f - \pi r^2$, som er positiv, da Cirklen ligger indeni Polygonen. Men ogsaa i alle andre Tilfælde kan Opgaven løses, idet man kan bevise, at:

For en vilkaarlig konveks Polygon med Perimeter p og Areal f er

$$rp - f - \pi r^2 > 0,$$

naar r betyder Radius i den største Cirkel, som kan ligge i Polygonen.

Lad os først orientere os med Hensyn til Eksistensen af en største Indercirkel. Paa Forhaand kan vi gaa ud fra en Cirkel, der rører mindst to af Polygonens Sider, da en indre Cirkel, som ikke gør det, kan forskydes, til dette bliver Tilfældet. Hvis disse to Sider er parallele, er vi sikre paa netop at have den største In-

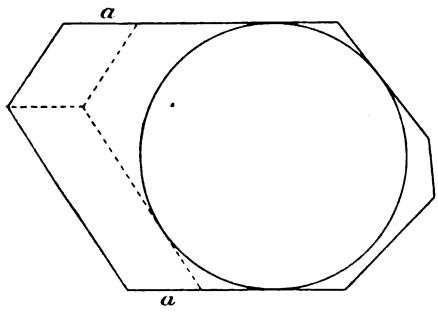


Fig 2.

Digitized by Google

clercirkel, og hvis den ikke rører endnu en Side, kan den parallelforskydes, til den gør det. Imellem Parallelerne ligger der to Rækker af Polygonsider, og af disse har den ene et Røringspunkt med Cirklen. Hvis den anden Række ikke rører, kan vi parallelforskyde den, indtil den rører, uden at Værdien af $rp - f - \pi r^2$ forandres. Thi forskydes et Stykke a, bliver baade rp og f formindsket med $2ra$. Om den ny Polygon gælder, at den er indeholdt i en omskreven konveks Polygon, saaledes at Buerne mellem to paa hinanden følgende Røringspunkter er mindre end 180°. — Tænker vi os derpaa en Indercirkel, som rører to ikke parallele Sider, men ikke flere, kan vi fremskaffe en større Indercirkel ved Ligedannethedstransformation med Lighedspunkt i de to Siders Skæringspunkt. Heraf følger, at den største Indercirkel nødvendigvis maa røre mindst tre af Siderne og saaledes, at disse bestemmer en omskrevet Trekant, saa at ogsaa her Buerne mellem paa hinanden følgende Røringspunkter er mindre end 180°.

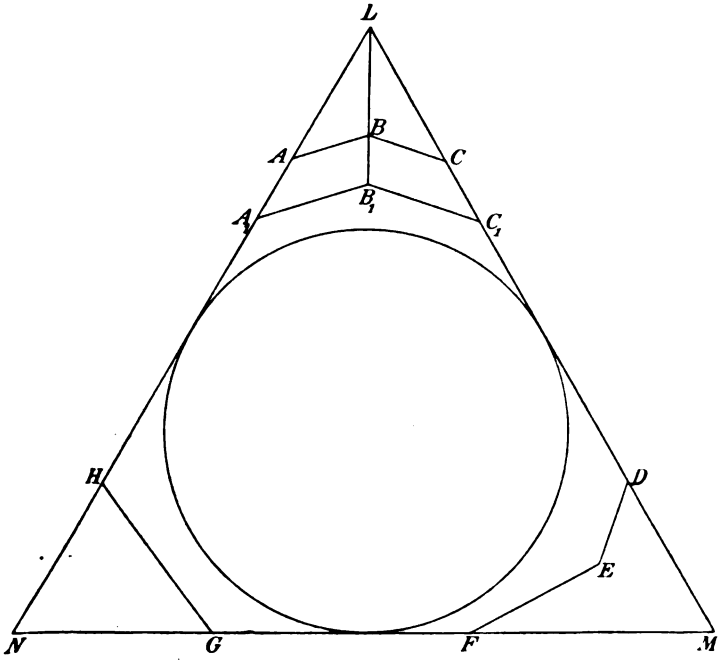


Fig. 3.

Paa Fig. 3 er *ABCDEFGHA* den givne Polygon med sin største Indercirkel. *ABC* er en Række Sider, som ikke

Digitized by Google

tangerer Cirklen, L Skæringspunktet mellem de nærmestliggende tangerende Sider. $A_1B_1C_1$ er dannet af ABC ved en Ligedannethedstransformation med L som Lighedspunkt.

Idet vi for de to Polygoner $ABCDEFGHA$ og $A_1B_1C_1DEFGHA_1$ sætter

$$\varphi = rp - f - \pi r^2$$
$$\varphi_1 = rp_1 - f_1 - \pi r^2,$$

er
$$\varphi - \varphi_1 = r(p - p_1) - (f - f_1).$$

Med Betegnelserne $LA = a$, $LC = c$, $AB + BC = k$, og de analoge for $A_1B_1C_1$, faas idet $LA : LA_1 = LC : LC_1 = m < 1$,

$$p - p_1 = (a_1 - a) + (c_1 - c) - (k_1 - k) = (1 - m)(a_1 + c_1 - k_1)$$
$$f - f_1 = (1 - m^2)t_1,$$

hvor t_1 er Arealet af Figuren $A_1B_1C_1LA_1$. Altsaa er

$$\varphi - \varphi_1 = (1 - m)r(a_1 + c_1 - k_1) - (1 - m^2)t_1.$$

Man ser straks ved Hjælp af de Trekanter, som har fælles Toppunkt i Cirklens Centrum og LA_1, LC_1, A_1B_1, B_1C_1 til Grundlinier, at

$$r(a_1 + c_1 - k_1) \geqq 2t_1,$$

hvor Lighedstegnet kun gælder, naar alle Siderne A_1B_1, B_1C_1 rører Cirklen. Heraf følger sluttelig, at

$$\varphi - \varphi_1 \geqq (1 - m) \cdot 2t_1 - (1 - m^2)t_1 = (1 - m)^2 t_1,$$

eller at $\varphi > \varphi_1$, hvilket vi kan udtrykke ved at sige, at φ bliver formindsket ved Transformation ind imod Cirklen.

Lad os nu vælge m saa stor, at $A_1B_1C_1$ netop kommer til at røre Cirklen i et eller flere Punkter, men ikke kommer indenfor Cirklen. Vi har da faaet en ny Polygon, som tangerer i flere Punkter end den givne, og de Rækker af Sider, som endnu ikke tangerer, transformeres nu ind imod Cirklen om ny Lighedspunkter, indtil vi ender med en omskrevet Polygon. For dennes Vedkommende ved vi, at φ er positiv; og da φ er blevet formindsket under hele Transformationen, er det saaledes godtgjort, at φ ogsaa er positiv for den Polygon, vi gik ud fra. Uligheden (1) er hermed vist at gælde for konvekse Polygoner.

Digitized by Google

Perimeteren p og Arealet f af et vilkaarligt konvekst Omraade kan bestemmes som Grænseværdier for de tilsvarende Størrelser for en omskrevet Polygon, hvis Sider er Støttelinier. For denne gælder Uligheden (1), og man faar derfor for det betragtede Omraade

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq 0.$$

Ved *Steiners* berømte Metoder kan man derefter indse, at Lighedstegnet kun kan gælde for Cirklens Vedkommende, idet man af en ikke cirkelformet Kurve kan danne en anden med mindre Perimeter og større Areal. Hermed vilde den omhandlede Sætning være bevist, men man kan naa til et væsentlig bedre Resultat, dersom man geometrisk kan bestemme endnu en Værdi af ρ, for hvilken φ er positiv. Dette er muligt, idet der gælder følgende Sætning:

For en vilkaarlig konveks Polygon med Perimeter p og Areal f er

$$Rp - f - \pi R^2 > 0,$$

naar R betyder Radius i den mindste Cirkel, som indeholder Polygonen.

Angaaende Eksistensen af en saadan mindste Ydercirkel bemærkes følgende. Man kan altid tegne en Cirkel, som indeholder Polygonen og formindske Cirklen saaledes, at den kommer til at gaa gennem to af Vinkelspidserne, A og K. Blandt Ydercirklerne gennem A og K vil enten Cirklen over AK som Diameter være den mindste eller, hvis ikke, vil den mindste gaa gennem endnu en Vinkelspids D, saaledes at $\angle ADK < 90^0$. Den mindste Ydercirkel er altsaa enten en Cirkel over en største Side eller Diagonal som Diameter, eller den er den mindste af de Cirkler, som gaar gennem tre Vinkelspidser og indeholder Polygonen. I alle Tilfælde er Vinkelspidserne indenfor Cirklen fordelt i Afsnit paa højst 180^0.

Lad os nu først betragte det simple Tilfælde, hvor den mindste Ydercirkel netop er omskrevet om Polygonen (Fig. 4). Paa hver Side konstrueres et Rektangel saaledes, at den modstaaende Side falder paa en Tangent, og vi ser da, at $Rp = 2f +$ Rektanglerne, og $Rp - f = f +$ Rektanglerne, og da dette

Digitized by Google

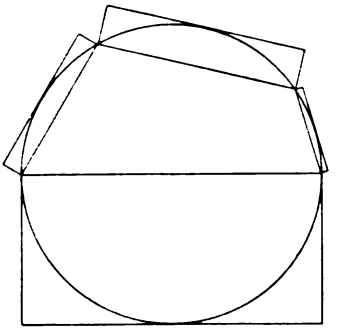


Fig. 4.

Areal indeholder Cirklen, er $Rp - f - \pi R^2 > 0$.

I det Tilfælde, hvor Polygonen har Vinkelspidser indenfor sin mindste Ydercirkel, vil ikke hele Cirklen være indeholdt i den Figur, som er sammensat af Polygonen og Rektanglerne, men der findes (Fig. 5) en Række sektorformede Arealer, begrænsede af Cirkelperiferien og to sammenstødende Sider i to paa hinanden følgende Rektangler, som falder udenfor Figuren. Hvis $Rp - f - \pi R^2$ ogsaa her er positiv, gælder det altsaa om at vise, at Summen af Sektorerne er mindre end Summen af de Dele af Rektanglerne, som ligger udenfor Cirklen.

Lad os nu betragte (Fig. 5) en Del af Polygonen $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, indeholdt i et Segment mindre end eller lig 180^0. Gennem Vinkelspidserne trækkes Linier A_1P_1, $A_2P_2'P_2$, $\cdots$ vinkelrette paa Korden A_1A_6. Naar man lader en Linie dreje sig efterhaanden om A_2, A_3, A_4, A_5, igennem de tilsvarende Sektorvinkler, vil den netop have drejet sig $\angle B_1A_1P_1 + \angle P_6A_6F_6$, og derfor vil enten en og kun en af Linierne AP (paa Fig. A_3P_3) gaa gennem vedkommende Sektor, eller to Linier AP vil falde paa et Rektangels Sider. De andre Linier gaar igen-

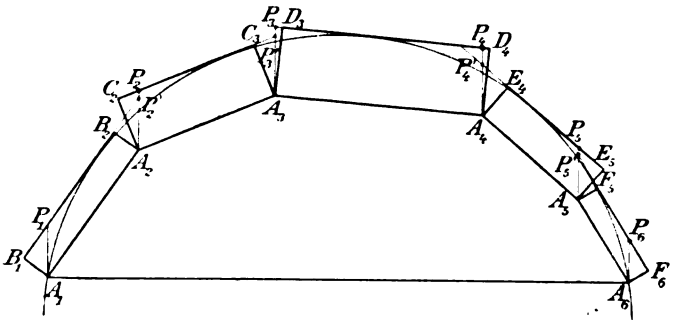


Fig. 5.

nem Rektanglerne, og paa Fig. 5 er det forudsat, at de skærer selve de Sider, som falder paa Tangenterne. Vi begynder nu med den Del af Sektoren A_3, som ligger tilhøjre for A_3P_3.

Digitized by Google

Den er mindre end $\triangle A_3D_3P_3$, som parallelforskydes til $\triangle A_4D_4P_4$. En Del af denne ligger som ønsket indeni Rektanglet A_3A_4 og udenfor Cirklen. Resten er sammen med Sektoren A_4 indeholdt i en Trekant $A_4E_4P_4'$, som er begrænset af A_4P_4, A_4E_4 og Forlængelsen af E_5E_4, og som kan forskydes til $\triangle A_5E_5P_5$. Denne behandles paa samme Maade, hvorved man kommer til $\triangle A_6F_6P_6$, som ligger udenfor Cirklen i det sidste Rektangel. Paa tilsvarende Vis gaar man frem med de Sektorer, som ligger til venstre for A_3P_3.

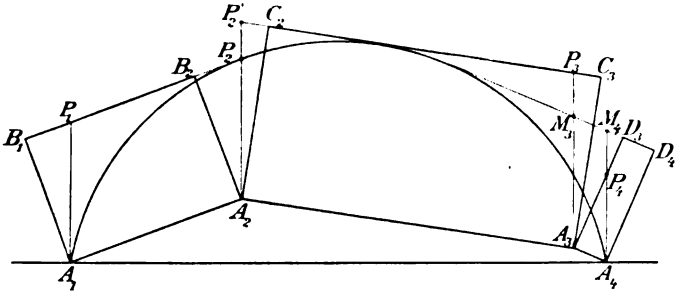


Fig. 6.

Naar som paa Fig. 6 Linien A_4P_4 ikke skærer selve Siden D_3D_4, men A_3D_3, vil Dobbeltsektoren A_3 være indeholdt i et Trapez $A_3M_3M_4P_4$, der har samme Areal som Trapezet $A_4D_4D_3P_4$, og dette har den rigtige Beliggenhed. I alle Tilfælde gælder altsaa Uligheden

$$Rp - f - \pi R^2 > 0.$$

Da Funktionen $\rho p - f - \pi\rho^2$ saaledes er positiv for $\rho = r$ og for $\rho = R$, men negativ for negative Værdier af ρ, maa den blive 0 for to forskellige Værdier af ρ, og baade R og r maa ligge i Intervallet mellem Polynomiets Rødder, hvis Differens, $2\sqrt{\frac{p^2}{4\pi^2} - \frac{f}{\pi}}$, derfor er større end $R - r$.

Vi har saaledes for enhver konveks Polygon følgende Ulighed

$$\frac{p^2}{4\pi} - f > \pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2. \qquad (6)$$

Digitized by Google

Vi kan nu gaa over til et konvekst Omraade begrænset af en vilkaarlig Kurve. Dennes Perimeter p og Areal f kan altid bestemmes som Grænseværdierne for Perimeter p_n og Areal f_n af en omskreven Polygon, hvis Sider er Støttelinier til Kurven. Radierne R i Kurvens mindste Ydercirkel og r i dens største Indercirkel er Grænseværdier for de tilsvarende Radier R_n og r_n i Polygonen. Man har derfor

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \pi \left(\frac{R-r}{2}\right)^2. \tag{7}$$

Følgelig kan $\frac{p^2}{4\pi} - f$ kun blive 0, naar $R = r$, og da falder Kurven sammen med de to Cirkler. Hermed er bevist, at af alle konvekse Kurver med samme Perimeter p har Cirklen alene det største Areal.

For at faa Oplysning om en ukonveks Kurve med bestemt Længde p, og som indeslutter et Areal f, betragter vi dens konvekse Hylster med Perimeter p_1 og Areal f_1. Da $p > p_1$ og $f < f_1$, er $\frac{p^2}{4\pi} - f > \frac{p_1^2}{4\pi} - f_1$, og dette viser, at Uligheden (7) ogsaa gælder for et ukonvekst Omraade, i hvert Fald, naar R og r betegner Radierne for Yder- og Indercirklerne til dets konvekse Hylster.

Af Cirklens isoperimetriske Maksimalegenskab følger umiddelbart Sætningen: Mellem alle Figurer, hvis Perimeter er sammensat af et givet Liniestykke a og en vilkaarlig Linie L, har Cirkelsegmentet det største Areal for ligestore Længder af L. Dette beviser *Steiner* saaledes (Sur le maximum et le minimum des figures···, Crelles Journal Bd. 24 (1842) p. 119): Lad L have en vilkaarlig Form og sammen med a danne Perimeteren for Figuren aL. Man kan da altid paa a konstruere et Cirkelsegment, hvis Bue α er lig L, paa samme Side af a som L. Vi fuldstændiggør denne Cirkel og betegner den anden Bue med β. Da er Cirklen med Perimeteren $\alpha + \beta$ større end den Figur, som er begrænset af $L + \beta$, saaledes at $a\alpha + a\beta > aL + a\beta$, altsaa $a\alpha > aL$.

Vi vil nu gaa over til at vise, at Lighedstegnet i (7) kun kan gælde, naar $R = r$, det vil sige, naar Figuren er en Cirkel.

Digitized by Google

Formlerne (2) og (3), som er udledet for konvekse Polygoner, ses ved Grænseovergang at gælde for vilkaarlige konvekse Omraader, og den hele Udvikling viser, at man for et saadant maa have

$$R\rho \geqq \pi R^2 + f, \qquad r\rho \geqq \pi r^2 + f,$$

og da (7) udtrykker, at $R - r \geqq$ Intervallet mellem Rødderne i Polynomiet $\pi\rho^2 + \rho\rho + f$, vil Lighedstegnet i (7) kun gælde, naar samtidig

$$R\rho = \pi R^2 + f, \qquad r\rho = \pi r^2 + f,$$

hvilket medfører

$$\rho = \pi (R + r), \qquad f = \pi R r.$$

Lad os tænke os, at der eksisterer en saadan Kurve K, hvis mindste Ydercirkel og største Indercirkel C og c er forskellige. Betragtes samtidig en anden Kurve K_1 med samme C og c og med Perimeter $\rho_1 = \rho$ og Areal f_1, faar man $R\rho \geqq \pi R^2 + f_1$ eller $f_1 \leqq f$. Dette gælder, selv om K_1 ikke er konveks, naar C og c hører til dens konvekse Hylster. Vi kan nu vise, at K maa være sammensat af Liniestykker og Cirkelbuer. I modsat Fald vil der paa en Bue mellem C og c findes et indre Punkt Q, hvis Omegn ikke er ret eller cirkulær, og vi kan da paa denne vælge to Punkter P og R paa hver Side af Q saa nær ved P, at den Cirkelbue PR, der har samme Længde som PQR, falder imellem C og c. Erstattes PQR med denne Cirkelbue, fremkommer en ny Kurve K_1 med samme Perimeter som K, men med større Areal f_1. Den saaledes fremkomne Kurve K_1 har nu samme C og c som K. Ovenfor fandt vi for en saadan Kurve $f_1 \leqq f$, og dette er i Modstrid med det her fundne Resultat $f_1 > f$.

K's Buer maa i Følge Sagens Natur røre c. Vi vil undersøge, hvorledes de ligger i Forhold til C. Hvis de ikke berører C, men to Buer danner et Knæk i et Punkt paa C, vil vi konstruere den ydre Parallelkurve K' til K i Afstanden ρ. K' er sammensat paa samme Maade som K, og dens Yder- og Indercirkel har Radierne $R + \rho$ og $r + \rho$. Endvidere finder man dens Perimeter P og Areal F bestemt ved

$$P = \pi\{(R + \rho) + (r + \rho)\}, \qquad F = \pi (R + \rho)(r + \rho).$$

Digitized by Google

saaledes at K' er af samme Art som K. Til Knækket paa K svarer paa K' en Cirkelbue med Radius ρ, og denne Bue støder sammen med en anden indenfor Ydercirklen til K'. Men dette har vi jo set er umuligt. Alle Buerne maa saaledes røre C. Der findes imidlertid ikke andre konvekse Kurver sammensat af Cirkelbuer, der rører C og c, end Cirkler. hvilket man let kan se ved at betragte den indre Parallelkurve i Afstanden r. Men en saadan Cirkel har ikke C og c til mindste Yder- og største Indercirkel.

Der eksisterer altsaa ikke andre Kurver end Cirklen, for hvilke samtidig

$$p = \pi(R + r), \qquad f = \pi R r,$$

og for Cirklens Vedkommende er $R = r$.

For alle andre Kurver end Cirklen er

$$\frac{p^2}{4\pi} - f > \frac{\pi}{4}(R - r)^2. \tag{8}$$

Hvis en konveks Kurve har en Perimeter $p \leqq \pi(R + r)$, viser (8), at $f < \pi R r$. Og hvis modsat $f \geqq \pi R r$, er $p > \pi(R + r)$.

Eksempelvis er for en Ellipse med Halvakserne a og b $R = a$, $r = b$, $f = \pi a b$, og (8) giver altsaa for Ellipsen det bekendte Resultat $p > \pi(a + b)$.

Som et andet Eksempel vil vi vælge Kurver med konstant Bredde b. Her er $R + r = b$, og $p = \pi b = \pi(R + r)$ og følgelig $f > \pi R r$.

De i det foregaaende for konvekse Kurver udledede Resultater kan finde Anvendelse paa konvekse Legemer, idet man ved Hjælp af dem kan bevise den ene af de af *Minkowski* opdagede Uligheder[1]), der kan benyttes til Bevis for Kuglens isoperimetriske Egenskab, blandt alle Flader med samme Overflade at indeslutte det største Volumen.

Vi betragter et vilkaarligt konvekst Legeme, hvis Overfladeareal betegnes med o. Legemet omskrives med en Cylinder-

[1]) *H. Minkowski*, Volumen und Oberfläche. Math. Annalen, Bd. 57. Ges. Abh. Bd. 2. p. 230—76, Spec. p. 259.

Digitized by Google

flade, med vilkaarlig Frembringerretning M. Et Normalsnit til Cylinderen er en konveks Figur med Perimeter p og Areal f. Gennem Centrum for en fast Kugle med Radius 1, lægges en Halvlinie med Retning M, den skærer Kuglen i et Punkt m, og det til m svarende Arealelement paa Kuglen betegnes med $d\omega$. I Følge en Sætning af *Cauchy*[1]) kan Legemets Overflade udtrykkes ved Formlen

$$o = \frac{1}{2\pi}\int 2f\,d\omega,$$

hvor Integralet som overalt i det følgende udstrækkes over hele Kuglefladen. Det er ikke vanskeligt at konstatere Rigtigheden af denne Formel. Thi betragter man først et plant Areal A og dets Projektion A' paa en Plan vinkelret paa Retningen M, finder man ved direkte Udregning, at

$$A = \frac{1}{2\pi}\int A'\,d\omega$$

og Udtrykket for o følger da heraf ved Grænseovergang, idet $2f$ er Summen af Projektionerne af Fladeelementerne paa o.

Sammen med o vil vi betragte dens ydre Parallelflade O i Afstanden ρ, det vil sige Indhyllingsfladen for en Kugle med Radius ρ og Centrum paa o. Projiceres O paa den samme Plan som o, faar man et konvekst Omraade med Areal F bestemt ved

$$F = \pi\rho^2 + \rho p + f,$$

og ved Cauchys Integral finder man da

$$O = \frac{1}{2\pi}\int 2F\,d\omega = 4\pi\rho^2 + 2\rho k + o,$$

hvor

$$k = \frac{1}{2\pi}\int p\,d\omega.$$

k vil vi kalde den givne Flades Konturintegral. Udtrykket for O er af samme Form som F, og det er nu Hensigten at vise, at

---

[1]) *A. Cauchy*, Note sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrnture des surfaces. Paris, Comptes rendus t. 13. (1841) p. 1060—65.

Digitized by Google

$$k^2 - 4\pi o \geqq 0,$$

hvor Lighedstegnet kun gælder for Kuglen. Dette er det samme som at vise, at der findes en negativ Værdi af ρ, der gør $4\pi\rho^2 + 2\rho k + o \leqq 0$ eller et positivt ρ, der gør

$$2\rho k - o - 4\pi\rho^2 \geqq 0.$$

Vi ved at for enhver Projektion af o gælder

$$\rho p - f - \pi\rho^2 \geqq 0,$$

naar $r \leqq \rho \leqq R$, og det saaledes at Lighedstegnet kun er gyldigt, dersom $R = r$, det vil sige, naar Projektionen er en Cirkel. Man kan let se, at der findes en brugelig Værdi af ρ, som er fælles for alle Projektioner af o.

Lad o være projiceret paa en Plan A i en Figur med Ydercirklen C, hvor C dog kan være selve o's Kontur. o projiceres paa en anden Plan A_1 ved en Cylinder, hvis Projektion paa A er en Parallelstribe. Dennes Bredde kan i det højeste være lig Diameteren $2R$ i C, og heraf følger, at Diameteren $2r_1$ i Indercirklen til Projektionen paa A_1 ogsaa i det højeste er lig $2R$. Altsaa er Indercirkien til enhver Projektion af o mindre eller lig Ydercirklen til enhver Projektion. Betegnes Maksimum af Radierne r til Indercirklerne til samtlige Projektioner ved r_M, og Minimum af Radierne R til Ydercirklerne ved R_m er $r_M \leqq R_m$. Vælges nu en saadan Værdi af ρ, at $r_M \leqq \rho \leqq R_m$, vil for alle Projektioner

$$\rho p - f - \pi\rho^2 \geqq 0.$$

Lighedstegnet gælder kun, naar Projektionen er en Cirkel. Heraf kan vi slutte, at

$$\frac{1}{2\pi}\int 2\,(\rho p - f - \pi\rho^2)\,d\omega = 2\rho k - o - 4\pi\rho^2 \geqq 0.$$

Da p og f er kontinuerte Funktioner af Punktet m paa Enhedskuglen, kan Integralet kun blive 0, dersom Integranden er 0 for alle m, det vil sige, naar alle o's Projektioner er Cirkler, og da er o en Kugleflade. Ved et tidligere anvendt Ræsonnement faar vi derefter

$$\frac{k^2}{4\pi} - o \geqq \pi\,(R_m - r_M)^2.$$

Digitized by Google

Her er at bemærke, at man meget vel kan have $r_M = R_m$, for andre Legemer end Kuglen. Dette er f. Eks. Tilfældet ved et Legeme begrænset af en Omdrejningscylinderflade og to Halvkugler. Men man har kun $k^2 - 4\rho o = 0$ for Kuglens Vedkommende. Altsaa:

Blandt alle konvekse Legemer med samme Overflade har Kuglen det mindste Konturintegral.

Til Slut en Bemærkning om Betydningen af Konturintegralet k. Parallelfladen til et Polyeder i Afstanden ρ er sammensat af de parallelforskudte Sideflader, af Udsnit i Cylinderflader med Radius ρ og Kanterne til Akser, og endelig af Udsnit i Kugler med Centrer i Hjørnespidserne. Summen af disse sidste er $4\pi\rho^2$. Betegnes Længden af en Kant med a og Nabovinklen til Polyedrets Rumvinkel ved denne Kant med u, er Arealet af det tilsvarende Cylinderudsnit au. Sættes $\Sigma au = 2k$, bliver

$$O = 4\pi\rho^2 + 2k\rho + o.$$

Summen af Produkterne af Kant og ydre Rumvinkel er altsaa lig det dobbelte Konturintegral. Kantvinkelproduktet er indført af *Steiner*[1]), der dog ikke blot behandler Parallelflader til Polyedre, men ogsaa til Flader med kontinuert Krumning. For saadanne bliver

$$k = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) d\omega,$$

hvor r og r_1 er Fladens Hovedkrumningsradier, altsaa Integralet af Middelkrumningen.

21. Marts 1921.

Anm. Efter at denne Afhandling var gaaet i Trykken, er jeg blevet opmærksom paa, at *Felix Bernstein* i en Afhandling »Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugel und in der Ebene«, Math. Ann. Bd. 60 (1905) ved en smuk Undersøgelse af Problemet paa Kuglefladen og Grænseovergang til Planen har fundet en Ulighed af samme Form som (8), hvor der dog i Stedet for Koefficienten π paa højre Side staar $1 : 2(1 - 2\pi)^2$. Forholdet mellem de to Koefficienter er 320, 6. I denne Sammenhæng bemærkes, at Sætningen S. 13 ikke kan bevises ved Hjælp af (8), men er udledet paa Grundlag af Sætningerne S. 2 og S. 5.

[1]) *J. Steiner*, Über parallele Flächen. Berlin, Bericht 1840, p. 114—18.

Digitized by Google

En funktionsteoretisk Bemærkning.

Uddrag af et Brev fra Professor G. Pólya i Zürich.
(Med nogle indledende Bemærkninger af H. Bohr).

I en lille Afhandling med ovenstaaende Titel i Matematisk Tidsskrift B, 1916 behandlede jeg følgende af Professor *Nørlund* stillede Problem: Kan en analytisk Funktion $f(z) = f(x+iy)$ vokse vilkaarlig stærkt i det Uendelige, ikke blot langs en enkelt Radius-Vector, men indenfor en hel Parallelstrimmel? Jeg beviste — ved Hjælp af en funktionsteoretisk Sætning af *Carathéodory* — at dette Spørgsmaal maa besvares benægtende. Som Professor *G. Pólya* har meddelt mig i et Brev, kan denne Sætning ogsaa bevises ved Hjælp af en Metode, der skyldes *Phragmén* og *Lindelöf*, og som har vist sig af stor Betydning ved Behandlingen af talrige funktionsteoretiske Problemer. Da Professor *Pólya*'s Bevis er meget elegant og belyser den nævnte funktionsteoretiske Metode paa karakteristisk Maade, har jeg udbedt mig hans Tilladelse til at offentliggøre det her i Tidsskriftet i Form af et Uddrag (i dansk Oversættelse) af hans Brev til mig.

— — —

Der gælder Sætningen: Der findes ingen indenfor Omraadet $x \geqq 0$, $\frac{-\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ regulær analytisk Funktion $f(z) = f(x+iy)$, som indenfor hele dette Omraade tilfredsstiller Uligheden

$$|f(x+iy)| \geqq e^{xe^x}. \qquad (1)$$

Bevis: Jeg antager, at Sætningen var forkert, altsaa at der fandtes en Funktion $f(z)$, som tilfredsstillede (1). Idet ε er et vilkaarligt lille positivt Tal, betragter jeg da Funktionen

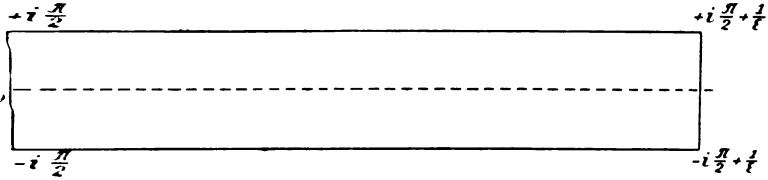
$$\varphi(z) = \frac{e^{e^z}}{\{f(z)\}^{\varepsilon}};$$

denne Funktion $\varphi(z)$ er regulær i det betragtede Omraade, da der jo derindenfor gælder Uligheden $f(z) \neq 0$, ja endog Uligheden

$$|f(z)| \geqq 1. \qquad (2)$$

Digitized by Google

g undersøger Funktionen $\varphi(z)$ paa Randen af Rektanglet G e Fig.).



Idet

$$|e^{e^z}| = |e^{e^x \cdot e^{iy}}| = e^{e^x \cos y},$$

gælder det paa de to vandrette Sider af dette Rektangel, hvor $y = \pm \frac{\pi}{2}$, at $|e^{e^z}| = e^0 = 1$,

altsaa, paa Grund af (2), at

$$|\varphi(z)| \leqq 1.$$

Paa den lodrette Side til venstre (hvor $x = 0$) er

$$|e^{e^z}| = e^{\cos y} \leqq e,$$

altsaa, paa Grund af (2),

$$|\varphi(z)| \leqq e,$$

og paa den lodrette Side til højre (hvor $x = 1 : \varepsilon$) er, i Følge (1),

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{e^{e^z}}{\{f(z)\}^\varepsilon} \right| \leqq \frac{e^{e^x \cos y}}{e^{\varepsilon x e^x}} =$$

$$e^{(\cos y - \varepsilon x)e^x} \leqq e^{(1-\varepsilon x)e^x} = e^0 = 1.$$

Der gælder følgelig paa hele Randen af Rektanglet G Uligheden $|\varphi(z)| \leqq e$, hvoraf følger, idet en analytisk Funktion jo antager sin numerisk største Værdi paa Randen, at der indenfor hele Rektanglet gælder Uligheden

$$\left| \frac{e^{e^z}}{\{f(z)\}^\varepsilon} \right| \leqq e.$$

Vi lader nu $\varepsilon \to 0$, medens z er et vilkaarligt fastholdt Punkt indenfor Parallelstrimlen $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$, $x \geqq 0$, og finder derved, idet $\{f(z)\}^\varepsilon \to 1$ for $\varepsilon \to 0$, at der indenfor hele denne Parallelstrimmel gælder Uligheden

Digitized by Google

$$|e^{e^z}| \leqq e.$$

Hermed er vi imidlertid ført til en Modstrid, idet det jo paa Parallelstrimlens Midterlinie (den reelle Akse) gælder, at

$$|e^{e^z}| = e^{e^x} \to \infty \qquad \text{for } x \to \infty.$$

— — — *G. Pólya.*

Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen.

Von G. Pólya in Zürich.

Es seien $G(z)$ und $g(z)$ ganze Funktionen, a eine Konstante. Wenn die Nullstellen der beiden Funktionen $G(z) - a$ und $g(z) - a$ nach Lage und Multiplizität vollständig übereinstimmen, dann kann man sich kurz so ausdrücken, dass $G(z)$ und $g(z)$ dieselben a-Stellen haben, oder dass $G(z)$ und $g(z)$ in ihren a-Stellen übereinstimmen. Wenn $G(z)$ und $g(z)$ dieselben a-Stellen haben, so existiert, nach einem geläufigen Satz, eine ganze Funktion $\varphi(z)$, so dass

$$G(z) - a = e^{\varphi(z)}(g(z) - a).$$

Die beiden ganzen Funktionen $e^{\varphi(z)}$ und $e^{-\varphi(z)}$ sind, wenn sich die ganze Funktion $\varphi(z)$ nicht auf eine Konstante reduziert, nicht konstant und auch nicht identisch einander gleich; sie stimmen in dreierlei Stellen miteinander überein, in den 0-, 1- und -1-Stellen, denn es ist

$$(e^{\varphi} - 0) = e^{2\varphi}(e^{-\varphi} - 0), \quad e^{\varphi} - 1 = -e^{\varphi}(e^{-\varphi} - 1), \quad e^{\varphi} + 1 = e^{\varphi}(e^{-\varphi} + 1).$$

Es lässt sich zeigen, dass dieses Beispiel einen äussersten Fall darstellt, wenn es sich um ganze Funktionen endlicher Ordnung handelt. Es gilt nämlich der Satz: wenn zwei ganze Funktionen endlicher Ordnung in viererlei Stellen miteinander übereinstimmen, so sind sie einander identisch gleich. Es ist stillschweigend vorausgesetzt, dass es sich nicht um zwei Konstanten handelt.

Digitized by Google

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die beiden ganzen Funktionen $G(z)$ und $g(z)$ in zweierlei Stellen, in ihren a- und b-Stellen übereinstimmen, $a \neq b$. Dann ist

$$G(z) - a = e^{P(z)}(g(z) - a), \quad G(z) - b = e^{Q(z)}(g(z) - b), \quad (1)$$

wo $P(z)$ und $Q(z)$ ganze Funktionen. Sind $G(z)$ und $g(z)$ von endlicher Ordnung, so kann man sogar behaupten, dass $P(z)$ und $Q(z)$ ganze rationale Funktionen sind[1]). Es folgt aus (1)

$$\frac{g(z) - a}{b - a} = \frac{e^{Q(z)} - 1}{e^{Q(z)} - e^{P(z)}}, \quad \frac{g(z) - b}{a - b} = \frac{e^{P(z)} - 1}{e^{P(z)} - e^{Q(z)}}. \quad (2)$$

Die rechten Seiten in (2) müssen ganze Funktionen sein, d. h. die Nullstellen des Nenners müssen unter den Nullstellen des Zählers enthalten sein. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn $P(z) = m\varphi(z)$, $Q(z) = (m-1)\varphi(z)$, $\varphi(z)$ eine ganze Funktion, m eine ganze Zahl ist, jedoch $m \gtrless 0$, $m \gtrless 1$. — Sind $G(z)$ und $g(z)$ von endlicher Ordnung, so müssen die beiden Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ den gleichen Grad haben, behaupte ich. Denn wäre $P(z)$ vom Grade m, $Q(z)$ vom Grade n und $m < n$, so hätten die Nullstellen von $e^{P(z)} - e^{Q(z)}$ den Grenzexponenten n, diejenigen von $e^{P(z)} - 1$ den Grenzexponenten m, nach bekannten Sätzen[2]). Da $n > m$, könnten die ersteren unmöglich nur einen Teil der letzteren ausmachen, und die zweitgenannte Funktion unter (2) könnte keine ganze sein.

Gehn wir nach dieser Feststellung zum Falle über, wo $G(z)$ und $g(z)$ in dreierlei Stellen übereinstimmen, in ihren a-, b- und c-Stellen, wo a, b, c drei verschiedene Zahlen. Dann gibt es drei Polynome $P(z), Q(z), R(z)$, so dass

$$\left.\begin{aligned} G(z) - a = e^{P(z)}(g(z) - a), \quad G(z) - b = e^{Q(z)}(g(z) - b), \\ G(z) - c = e^{R(z)}(g(z) - c) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Durch Elimination der drei Grössen $G(z)$, $g(z)$, 1 aus den 3 inbezug auf sie homogenen linearen Gleichungen (3) ergibt sich

[1]) Vgl. z. B. *A. Pringsheim*, Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung, Mathematische Annalen, Bd. 58 S. 257–342, insbesondere S. 327.

[2]) *Pringsheim* a. a. O. S. 334.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}(b-c)\,e^{Q+R}+(c-a)\,e^{R+P}+(a-b)\,e^{P+Q}+\\ (b-c)\,e^{P}+(c-a)\,e^{Q}+(a-b)\,e^{R}=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bekannt ist jedoch folgende Tatsache[1]): sind $c_1, c_2, c_3 \cdots c_n$ Konstanten und $F_1(z), F_2(z), \cdots F_n(z)$ Polynome, so beschaffen, dass $F_k(z) - F_l(z)$ keine Konstante ist, wenn $k \gtrless l$, so folgt aus dem Bestehen der in z identischen Gleichung

$$c_1 e^{F_1(z)} + c_2 e^{F_2(z)} + \cdots + c_n e^{F_n(z)} = 0,$$

dass

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Wie ist dies mit dem Bestehen von (4) verträglich? Insbesondere müssen wir beachten, dass $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ von gleichem Grade sind. Bezeichnen wir diesen Grad mit m und die höchsten Koeffizienten mit α, β, γ, so dass

$$P(z) = \alpha z^m + \cdots, \quad Q(z) = \beta z^m + \cdots, \quad R(z) = \gamma z^m + \cdots, \tag{5}$$

$$\alpha \neq 0, \qquad \beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0, \tag{6}$$

$$m \geqq 1. \tag{7}$$

(7) ist notwendig; denn wenn $m = 0$, sind $G(z)$ und $g(z)$ Konstanten oder einander identisch gleich.

In dem System der höchsten Koeffizienten

$$\left.\begin{matrix}\beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta\\ \alpha & \beta & \gamma\end{matrix}\right\} \tag{8}$$

der 6 Exponenten, die in (4) vorkommen, müssen zunächst mindestens 2 untereinander gleich sein. Die Übereinstimmung zweier Zahlen in der ersten Zeile des Schema (8) hat die Übereinstimmung der beiden darunter stehenden zu Folge. Es muss entweder eine Übereinstimmung einer Zahl der ersten Zeile mit der zweiten stattfinden, wie

$$\beta + \gamma = \alpha \qquad \text{A)}$$

oder eine zwischen zwei Zahlen derselben Zeile, wie

$$\beta = \gamma. \qquad \text{B)}$$

Die Bezeichnung kann als passend gewählt vorausgesetzt werden, und wir brauchen tatsächlich nur die beiden Möglichkeiten A) und B) zu diskutieren.

[1]) *Pringsheim* a. a. O. S. 289.

Digitized by Google

Im Falle A) sieht die Tafel (8) so aus:

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha & 2\alpha-\beta & \alpha+\beta, \\ \alpha & \beta & \alpha-\beta. \end{array}\right\} \quad (8')$$

β muss einem andern Element der Tafel (8') gleich sein. Da jetzt $\gamma = \alpha - \beta$ und (6) respektiert werden muss, bleibt nur der Fall $\beta = \alpha - \beta$ übrig. Die Tafel (8') nimmt dann die Form

$$\left.\begin{array}{lll} 2\beta & 3\beta & 3\beta \\ 2\beta & \beta & \beta \end{array}\right\} \quad (8'')$$

an, und folgende Gleichungen müssen wegen (4) stattfinden:

$$\left.\begin{array}{l} (b-c)\,e^{Q+R} + (b-c)\,e^{P} = 0, \\ (c-a)\,e^{R+P} + (a-b)\,e^{P+Q} = 0, \\ (c-a)\,e^{Q} + (a-b)\,e^{R} = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die beiden letzten ergeben

$$(c-a)^2 = (a-b)^2.$$

Daraus folgt, da $c = b$ ausgeschlossen,

$$c - a = a - b. \qquad (10)$$

(9) (10) ergeben

$$e^{Q} = -e^{R}, \qquad e^{P} = e^{2R}. \qquad (11)$$

(10) (11) in (3) eingesetzt wird

$$\left.\begin{array}{llll} g(z)-a = (b-a)e^{-R}, & & G(z)-a = (b-a)\,e^{R}, \\ g(z)-b = (b-a)(e^{-R}-1), & & G(z)-b = (b-a)(e^{R}-1), \\ g(z)-c = (b-a)(e^{-R}+1), & & G(z)-c = (b-a)(e^{R}+1), \end{array}\right\} \quad (12)$$

mit $c = 2a - b$.

Das System (12) stellt wirklich ein Paar ganze Funktionen endlicher Ordnung $g(z)$, $G(z)$ dar, die ohne identisch zu sein, in dreierlei Werten übereinstimmen. System (12) ist das allgemeinste derartige System, behaupte ich. Zum Beweise habe ich nur den Fall B) durchzudiskutieren.

Im Falle B) nimmt Tafel (8) die Form an

$$\left.\begin{array}{lll} 2\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \alpha & \beta & \beta. \end{array}\right\} \quad (8''')$$

Das Element α von (8''') muss notwendigerweise einem andern Elemente von (8''') gleich sein. $\alpha = \alpha + \beta$ ist wegen

Digitized by Google

(6) ausgeschlossen. $\alpha = 2\beta$ kommt auf Tafel (8″), also auf den besprochenen Fall A) zurück. Es bleibt nur $\alpha = \beta$, wodurch (8‴) in

$$\left.\begin{matrix} 2\alpha & 2\alpha & 2\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{matrix}\right\} \quad (8^{IV})$$

übergeht. Ich setze

$$\left.\begin{matrix} P(z)-P(0)=p(z), & Q(z)-Q(0)=q(z), & R(z)-R(0)=r(z), \\ e^{P(z)}=Ae^{p(z)}, & e^{Q(z)}=Be^{q(z)}, & e^{R(z)}=Ce^{r(z)} \end{matrix}\right\} \quad (13$$

wo A, B, C Konstanten, u. zw.

$$A \neq 0, \qquad B \neq 0 \qquad C \neq 0, \qquad (14$$

da doch $G(z)$ keine Konstante sein soll. Gemäss Tafel (8^{IV}) resultiert aus (4)

$$(b-c)Ae^{p(z)} + (c-a)Be^{q(z)} + (a-b)Ce^{r(z)} = 0. \qquad (15$$

$p(z), q(z), r(z)$ verschwinden für $z = 0$, vgl. (13). Nach dem ständig benutzten Prinzip kann (15) nur bestehn, wenn identisch $p(z) = q(z) = r(z)$. Setzt man die erhaltenen Werte

$$e^{P(z)} = Ae^{p(z)}, \quad e^{Q(z)} = Be^{p(z)}, \quad e^{R(z)} = Ce^{p(z)}$$

in (3) ein, so ergibt sich, dass A, B, C voneinander verschieden sind und

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{bB-cC}{B-C} - \frac{b-c}{B-C}e^{-p(z)}, \\ &= \frac{cC-aA}{C-A} - \frac{c-a}{C-A}e^{-p(z)}, \\ &= \frac{aA-bB}{A-B} - \frac{a-b}{A-B}e^{-p(z)}. \end{aligned}$$

Wäre $p(z)$ keine Konstante, so müsste

$$\frac{bB-cC}{B-C} = \frac{cC-aA}{C-A} = \frac{aA-bB}{A-B},$$

$$\frac{b-c}{B-C} = \frac{c-a}{C-A} = \frac{a-b}{A-B}$$

sein. Die beiden Zeilen ergeben umgeformt

$$Aa(B-C) + Bb(C-A) + Cc(A-B) = 0,$$

$$a(B-C) + b(C-A) + c(A-B) = 0.$$

Durch Elimination von a ergibt sich

$$(B-A)(C-A)(b-c) = 0.$$

Nun darf weder $b=c$, noch $B=A$ noch $C=A$ sein (vgl. oben).

Digitized by Google

(12) repräsentiert also tatsächlich die allgemeinste Auflösung der Aufgabe: zwei ganze Funktionen endlicher Ordnung $G(z)$ und $g(z)$ zu finden, die in ihren a-, b-, c-Stellen übereinstimmen. (In dem eingangs gegebenen Beispiel war $a=0$, $b=1$ gesetzt). In dem Tripel der Werte a, b, c muss es also immer einen geben, der tatsächlich nicht angenommen wird (bei der gewählten Bezeichnung a) während die beiden anderen unendlich oft angenommen werden (b und c in der gewählten Bezeichnung; $e^R - 1$ und $e^R + 1$ haben unendlich viele Nullstellen[1])). Diese Sachlage ist der Grund, dessentwegen es sicher nicht zwei Funktionen $G(z)$ und $g(z)$ geben kann, die in viererlei verschiedenen Werten a, b, c, d übereinstimmen, ohne identisch zu sein: unter den 4 Werten a, b, c, d könnte man, wie leicht zu sehn, sicherlich ein Tripel finden, das die gestellte Bedingung nicht erfüllt. Denn würde etwa das Tripel a, b, c so beschaffen, dass der Wert a von $G(z), g(z)$ nicht angenommen wird, hingegen b, c unendlich oft angenommen werden, so wäre eins der beiden Zahlentripel a, b, d und b, c, d sicherlich unzulässig.

So ist der in Aussicht genommene Satz bewiesen. Der Beweis benötigt, wie man sieht, ausser bekannten fundamentalen Tatsachen über ganze Funktionen endlichen Geschlechts nur eine Diskussion, die mehr algebraischen Charakter hat.

Es hätte vielleicht ein gewisses Interesse, die Voraussetzung der endlichen Ordnung abzustreifen und die Fragestellung auf beliebige ganze Funktionen zu übertragen.

Wenn ich in dieser Richtung von keinem bestimmten Resultat berichten kann, so will ich doch folgenden Satz mitteilen, der im Grunde genommen sich auf nahe verwandte Gegenstände bezieht: Ist $g(z)$ eine beliebige ganze Funktion, nur nicht von der Form $P(z)e^{Q(z)}$, wo $P(z)$, $Q(z)$ Polynome, so hat mindestens eine der drei Funktionen $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ unendlich viele Nullstellen; ist $g(z)$ nicht von der Form ae^{bz}, wo a, b Konstanten, so hat mindestens eine der drei Funktionen $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ Nullstellen. — Es gibt hingegen ganze Funktionen $g(z)$, die zugleich mit ihrer ersten Derivierten den Wert 0 als *Picard*'schen Ausnahmewert zulassen; sie haben die Form $g(z) = e^{\int e^{h(z)}dz}$, wo $h(z)$ ganz.

[1]) *Pringsheim* a. a. O. S. 332.

Digitized by Google

Litteraturanmeldelser.

H. Lacaze: Cours de Cinématique théorique (138 S. Paris 1920. Gauthier-Villars & Cie).

Bogen er en Lærebog i Kinematik og giver en Fremstilling af de Ting, som sædvanlig medtages i en mindre Bog over et saadant Emne.

Første Kapitel behandler Læren om Vektorer og deres Sammensætning, derunder Bestemmelsen af Centralaksen samt konjugerede Linier og Nulsystemer. I næste følger Kinematiken om et fast Punkt og herpaa i tredje Læren om det faste Legemes vilkaarlige Bevægelse. Naar Gangen i denne Undersøgelse er: Bevægelse paa Kuglefladen — Bevægelse i Rummet — og til sidst som specielt Tilfælde Bevægelse i Planen, kan det ikke andet end falde lidt kunstigt i en Lærebog som denne, selv om det kan have principielle Fordele.

Efter et Kapitel om Acceleration følger det sidste og interessanteste, der nærmere behandler Bevægelser i Planen; her opstilles Savary's Formel med tilhørende Konstruktioner, hvorpaa der gives nogle smukke Eksempler.

Fremstillingen, der er klar og let læselig, er hovedsagelig analytisk. Forf. gør ikke noget Forsøg paa at gøre Beviserne virkelig eksakte; det er en stiltiende Forudsætning overalt, at de forekommende Funktioner er kontinuerte og tilstrækkelig mange Gange differentiable.

David Fog.

Danske Eksamensopgaver.

Skoleembedseksamen ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet.
II Del (ældre Ordning). Januar 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 2.

Idet Rækken med konstante Led Σa_n antages konvergent, skal man bevise, at Rækken

$$a_1 \cos \frac{x}{1} + a_2 \cos \frac{x}{2} + \cdots + a_n \cos \frac{x}{n} + \cdots$$

konvergerer for ethvert x.

Digitized by Google

2. Find Værdien af det krumlinede Integral

$$\int_C \frac{e^{-ax}\,dx}{4+x^4},$$

hvor a er en positiv Konstant, medens Integrationsvejen C bestaar af en Cirkelkvadrant med Centrum i Begyndelsespunktet og Radius R og af dens to begrænsende Radier paa Aksernes positive Retninger.

Hvilke Formler kan man derved udlede ved at lade R vokse uden Grænse?

3. For Elementerne i Fibonaccis Række

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

hvor $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, skal man bevise Formlen

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - (-1)^n, \quad n > 0,$$

og deraf udlede, at enhver ulige Primfaktor i a_{2n} er af Formen $4r+1$.

Løsninger.

Ifølge en bekendt Sætning kommer det an paa at bevise Konvergensen af Rækken

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \cos\frac{x}{n} - \cos\frac{x}{n+1} \right| = 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \sin\frac{x}{2n(n+1)} \cdot \sin\frac{(2n+1)x}{2n(n+1)} \right|. \quad (1)$$

Nu giver Potensrækken for $\sin\alpha$ umiddelbart for alle α

$$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \cdot e^{|\alpha|},$$

og altsaa finder man

$$\left| \cos\frac{x}{n} - \cos\frac{x}{n+1} \right| < \frac{(2n+1)|x|^2}{4n^2(n+1)^2} e^{\left|\frac{x}{n}\right| + \left|\frac{x}{n+1}\right|} < \frac{(2n+1)|x|^2}{4n^2(n+1)^2} e^{2|x|},$$

hvoraf følger, at Rækken (1) er konvergent for alle x, og det samme gælder følgelig den forelagte Række.

2. I første Kvadrant har Integranden kun en eneste Singularitet, nemlig den simple Pol $1+i$; haves derfor $R < \sqrt{2}$, er Integralet 0, medens det ikke eksisterer for $R = \sqrt{2}$. Antages $R > \sqrt{2}$, giver Cauchys Sætning

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-ax}dx}{4+x^4} = \lim_{x=1+i}\left(\frac{(x-1-i)\,e^{-ax}}{4+x^4}\right) \\ &= -\frac{e^{-a}}{16}(\cos a + \sin a + i(\cos a - \sin a)). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Betegner nu K Buen af Cirklen, haves

$$\int_C = \int_0^R + \int_K + \int_{iR}^0 . \quad (2)$$

Sættes dernæst i det krumlinede Integral paa højre Side

$$x = Re^{i\theta},$$

faas

$$\int_K < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{R^3 - \frac{4}{R}}$$

saaledes at dette Integral konvergerer mod Nul, naar R vokser uden Grænser. Sættes endelig i det sidste Integral paa højre Side af (2) $x = iz$, faas ved (1)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} + \sin ax}{4+x^4}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{8}(\cos a - \sin a),$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{4+x^4} = \frac{\pi e^{-a}}{8}(\cos a + \sin a).$$

3. Da de første Elementer i Rækken er

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots,$$

ser man straks, at Formlen gælder for de første Værdier af n; antages da

$$a_n a_{n-2} = a_n(a_n - a_{n-1}) = a_{n-1}^2 + (-1)^n,$$

og adderes $a_n^2 + 2a_n a_{n-1}$ til paa begge Sider af Lighedstegnet, faas

$$a_n(2a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})^2 + (-1)^n$$

eller

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (-1)^n,$$

saaledes, at Formlen er almengyldig, fordi den gælder for de første Værdier af n, baade lige og ulige.

Da $a_{2n}a_{2n+2}$ bliver en Sum af to Kvadrattal, og da denne Sum ikke kan være delelig med noget Primtal af Formen $4r+3$, maa alle ulige Primfaktorer i a_{2n} være af Formen $4r+1$.

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN.

Tre Foredrag over Geometriens Grundlag.[1])

Af J. Hjelmslev.

I. Den rette Vinkel.

1. I Spidsen for Euklids Elementer finder man foruden 23 Definitioner følgende 5 Postulater:

Lad det være forudsat,

I. At man kan trække en ret Linie fra et hvilket som helst Punkt til et hvilket som helst Punkt.

II. At man kan forlænge en begrænset ret Linie i ret Linie ud i eet.

III. At man kan tegne en Cirkel med et hvilket som helst Centrum og en hvilken som helst Radius.

IV. At alle rette Vinkler er lige store.

V. At, naar en ret Linie skærer to rette Linier, og de indvendige Vinkler paa samme Side er mindre end to rette, saa mødes de to Linier, naar de forlanges ubegrænset, paa den Side, hvor de to Vinkler ligger, der er mindre end to rette.

Endvidere følgende almindelige Størrelsesaksiomer:

1. Størrelser, som er lige store med den samme, er indbyrdes lige store.

2. Naar lige store Størrelser lægges til lige store Størrelser, er Summerne lige store.

3. Naar lige store Størrelser trækkes fra lige store Størrelser, er Resterne lige store.

4. Størrelser, der kan dække hverandre, er indbyrdes lige store.

5. Det hele er større end en Del af det.

2. Blandt ovennævnte Postulater skal vi her særlig fæste vor Opmærksomhed ved det fjerde, det mærkelige Postulat, som udsiger, at alle rette Vinkler er lige store. *Zeuthen* var ved sine sidste Overvejelser[2]) maaske nærmest tilbøjelig til i dette Postulat at se Bevarelsen af et Udtryk for den rette Vinkels empiriske Herkomst og Betydning. Ligesom man i

[1]) Holdte i Mathematisk Forening i November og December 1920.

[2]) *H. G. Zeuthen*: Hvorledes Matematiken fra Platon til Euklid b'ev rationel Videnskab. København 1917, S. 275—284.

Digitized by Google

de 3 første Postulater havde Udtryk for, at det var de empiriske rette Linier og Cirkler man var gaaet ud fra, saaledes skulde det fjerde minde om Brugen af Vinkellineal (Gnomon) til Afsætning af empiriske rette Vinkler, og bidrage til at Systemets Rækkevidde blev begrænset netop til den empiriske Geometri. Vi skal senere vende tilbage til dette Synspunkt, men skal her kun bemærke, at det overhovedet ikke er muligt at identificere den empiriske Geometri ved Hjælp af Postulater.

3. En rent formel Grund til, at det 4de Postulat var blevet opstillet, kunde være den, at det, der udsiges i det efterfølgende (det femte) Postulat overhovedet ingen Mening kan have, før man véd, at alle rette Vinkler er lige store. Denne Grund rummer dog neppe nogen fyldestgørende Forklaring. For at kunne komme lidt dybere ind i Sagen vil vi undersøge, hvor Euklid benytter sit Postulat.

Efter i Sætning 13 at have vist, at to Nabovinkler tilsammen udgør 2 rette, viser Euklid i 14 den omvendte Sætning, at 2 Vinkler, der har et Ben fælles og ligger ved Siden af hinanden, og som tillige tilsammen udgør 2 rette, maa være Nabovinkler. Beviset føres indirekte (ved Hjælp af den foregaaende Sætn. 13). Og her benyttes da udtrykkelig, at 2 rette er lig 2 rette. Derefter vises i 15, at Topvinkler er lige store. Beviset beror paa, at de to Vinkler har samme Nabovinkel, og her benyttes da atter, at 2 rette = 2 rette. Undersøgelserne i 13, 14 og 15, hvis egentlige Maal er at vise den sidste Sætning, at Topvinkler er lige store (hvilken Sætning nemlig skal bruges ved Beviset for den efterfølgende vigtige Sætning 16, at Nabovinklen til den ene Vinkel i en Trekant er større end enhver af de andre Vinkler i Trekanten), beror da væsentlig paa Postulat IV (foruden naturligvis paa de almindelige Størrelsesaksiomer). Og spørger man altsaa, hvad Posulat IV bruges til hos Euklid, kan man simpelthen svare: til at vise, at Topvinkler er lige store. At dette har været Euklids Mening, synes indlysende.

4. Et andet Spørgsmaal er, hvorvidt Euklid har gennemført sin hele Tankegang konsekvent; om han ikke kunde have undgaaet at opstille Postulat IV, om han ikke muligvis kunde bevise det ved Hjælp af sine øvrige Forudsætninger. En omhyggelig Undersøgelse heraf vil vise, at dette er Tilfældet,

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

men at dette ingenlunde tør siges at være saa let at indse, som man undertiden har villet mene, saaledes at det ikke bør forundre os, om Euklid ikke var naaet frem til en saadan Erkendelse.

5. Lad os se lidt nærmere paa, hvorledes Euklid gennemfører de nævnte Beviser i 13, 14 og 15. De bygger direkte paa Postulat IV. Men der er en anden Ting at lægge Mærke til. For at vise, at Nabovinklerne DBE og CBE tilsammen udgør 2 rette (13), maa Euklid benytte en Hjælpelinie, nemlig den vinkelrette paa Linien CBD oprejst i Punktet B. Han maa altsaa vide, at en saadan Linie eksisterer. Dette er da ogsaa forud vist i 11. Beviset leder tilbage til Sætn. 4, som udsiger, at naar 2 Trekanter har 2 Sider og den mellemliggende Vinkel stykkevis lige store, er ogsaa de øvrige tilsvarende Stykker lige store. Eksistensen af den vinkelrette, oprejst i et Punkt af en Linie føres altsaa tilbage til Spørgsmaalet om Trekantflytning. Har man 2 Trekanter ABC og $A_1B_1C_1$, og er $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, da skal i Følge Sætn. 4 ogsaa $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$. Beviset beror paa Muligheden af en »Flytning« af $\triangle ABC$ saaledes, at AB lægges paa A_1B_1, $\angle A$ paa $\angle A_1$, hvorved ogsaa AC dækker A_1C_1, BC B_1C_1. At en saadan »Flytning« (med Ligestorhed i samtlige tilsvarende Stykker) er mulig, er ikke noget, som lader sig udlede af de Postulater og Aksiomer, Euklid udtrykkelig har opstillet. Euklid mangler derfor i sin Liste over Postulater[1] et udtrykkelig udtalt »Flytningspostulat« (hvorledes dette kan formuleres er her mindre væsentligt; vi forlanger kun, at det skal kunne føre til Sætn. 4).

Det nytter ikke, at man som *Zeuthen* ved sindrige filologiske Fortolkninger søger at gøre Manglen mindre iøjnefaldende[1]). Og Zeuthen anerkender da ogsaa tilsidst[2]), at der for Gennemførelsen af Beviset for Sætn. 4 mangler et Postulat. Det har heller ikke nogen særlig Betydning — forekommer det mig — at Euklid paa det Sted, hvor Sætn. 4 skal bevises, ikke endnu har kunnet angive nogen Konstruktion angaaende Afsætning af en Vinkel ud fra en given Halvlinie[3]). Det vilde ikke hjælpe ham synderligt, om en saadan Konstruktion (resp.

[1]) *Zeuthen*: Platon—Euklid, S. 267 ff.
[2]) S. 270.
[3]) Se herom *Zeuthen*, ibd. S. 272.

Digitized by Google

et tilsvarende Postulat om Muligheden af Vinklens Afsætning kunde staa til Raadighed. Det, han skal vide for at kunne gennemføre Beviset for Sætn. 4, er følgende:

Naar der foreligger en Trekant $A_1B_1C_1$ og et Liniestykke AB lige saa stort som A_1B_1, da eksisterer der til en given Side for AB en Trekant ABC, som kan dækkes af $A_1B_1C_1$, og som altsaa har Vinklerne A, B, C og Siderne AB, BC, AC stykkevis lige saa store som Vinklerne A_1, B_1, C_1 og Siderne A_1B_1, B_1C_1, A_1C_1 i den givne Trekant. Ved Hjælp af et saadant Flytningspostulat vil Sætn. 4 umiddelbart kunne bevises, og netop som Euklid gør det. Og det ses, at en særlig Viden om Muligheden af Afsætning af en Vinkel da vil være overflødig, medens det omvendt, hvis man ikke havde det omtalte fuldstændige Flytningspostulat, ikke vilde kunne være til nogen Nytte at have en særlig Viden om Muligheden af Vinklers Afsætning ved Konstruktion.

6. Med Hensyn til den Betydning, som en saadan Konstruktion kunde have, skal det her særlig fremhæves, at det ikke i al Almindelighed gaar an uden videre at identificere Konstruktion og Eksistensbevis. Konstruktion (Løsning af et Problem) gaar ud paa en Tilvejebringelse af en Ting — man tør ikke sige ved Passer og Lineal, men man tør sige paa Grundlag af Eksistens- og Skæringspostulater for ret Linie og Cirkel. Men Muligheden af Vedkommende Tings Tilvejebringelse ad denne Vej kan ikke altid sikres gennem selve Konstruktionens Udførelse; den maa undertiden være sikret forud gennem et Postulat, som direkte udsiger, at Tingen eksisterer, og som afgiver et nødvendigt Grundlag for Konstruktionens Gennemførelse ud over det, som ligger i Muligheden af de enkelte Operationer, hvoraf Konstruktionen sammensættes. Et Eksempel herpaa foreligger netop i Problemet om Trekantsflytningen, der kort kan formuleres saaledes:

Der er givet en Trekant $A_1B_1C_1$ og et Liniestykke $AB = A_1B_1$. Til en given Side for Linien AB skal bestemmes en Trekant ABC, hvori samtlige Stykker er parvis lige saa store som de tilsvarende Stykker i den givne Trekant.

At denne Konstruktionsopgave har en Løsning, kan ikke vises ved Operationer »med Passer og Lineal« (eller rettere

Digitized by Google

det hertil svarende postulatmæssige Ækvivalent). Men opstiller man det Postulat, at den har en Løsning, altsaa at den søgte Trekant eksisterer, da vil Konstruktionens Gennemførelse være at foretage ved en af følgende 3 Fremgangsmaader α, β, γ:

α) Man afsætter til den givne Side for $AB \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (Muligheden og Gennemførelsen af denne Operation maa altsaa forud være sikret; at den er eentydig, følger af Størrelsesaksiomet 5). Man afsætter paa det fundne Vinkelben $AC = A_1C_1$. Skal nu den søgte Trekant eksistere, maa det være den ved de angivne Operationer bestemte Trekant ABC. Efter Flytningspostulatet eksisterer den søgte Trekant. Og vi har da ved de angivne Operationer tilvejebragt den søgte Trekant.

β) Man drager 2 Cirkler med Centrer A og B og Radier = henholdsvis A_1C_1 og B_1C_1 og bestemmer et Skæringspunkt C mellem disse Cirkler til den givne Side for AB. Skal den søgte Trekant eksistere, maa den kunne findes paa denne Maade. Efter Flytningspostulatet eksisterer den søgte Trekant. Og vi kan da ved de angivne Operationer tilvejebringe den søgte Trekant. At der bliver et Skæringspunkt C mellem de benyttede Cirkler, følger altsaa af Flytningspostulatet. At der kun bliver eet (til den givne Side for AB), følger imidlertid ikke heraf.

γ) Man afsætter ved A og B 2 Vinkler ud fra AB, lig henholdsvis $B_1A_1C_1$ og $A_1B_1C_1$, og beliggende til den givne Side for Linien AB. Skal nu den søgte Trekant eksistere, maa de to ubekendte Sider falde paa de herved bestemte fra A og B udgaaende Linier. Efter Flytningspostulatet eksisterer den søgte Trekant. De to fundne Linier har da som Følge heraf et Skæringspunkt. Herved har vi da ved de angivne Operationer tilvejebragt den søgte Trekant [1]).

7. Betragter vi særlig den første af de her fremsatte Konstruktioner, som er den, der ved den foreliggende Diskussion nærmest kan komme paa Tale, da er det jo dér forudsat, at man kan afsætte en Vinkel. Ser vi efter, hvorledes Euklid naar til at udføre dette (23), finder vi, at han atter her be-

[1]) Fremgangsmaaderne β og γ rummer det interessante Moment, at man ogsaa til Bevis for selve de udførte Operationers Mulighed (Eksistensen af de benyttede Skæringer) benytter Flytningspostulatet. Dette kan dog naturligvis undgaas ved Hjælp af andre, dog noget komplicerede, Betragtninger.

Digitized by Google

nytter Flytningspostulatet, idet han netop for at faa Vinklen afsat flytter en Trekant, som indeholder Vinklen. Men denne Gang foregaar Flytningen af Trekanten ved den ovennævnte Konstruktion β. Euklids Konstruktion 23 rummer altsaa i sig selv ikke noget Eksistensbevis; kun ved Flytningspostulatet er Eksistensen sikret.

Hvis det for Euklid havde været magtpaaliggende ved Beviset for 4 at lade en rent konstruktionsmæssig Frembringelse af den flyttede Trekant træde for Dagen, kunde han altsaa have opnaaet det ved i Stedet for Konstruktionen α at sætte β. Men Flytningspostulatet kom man ikke derved udenom. Og selve Konstruktionens Entydighed var ikke let at paavise.

Sagen har imidlertid næppe for Euklid været saa kompliceret. Han har haft sit Flytningspostulat, som noget, ikke direkte formuleret, men underforstaaet som en »Selvfølge«, noget der maaske snarere, om det skulde nævnes, hørte hjemme blandt Aksiomerne end blandt Postulaterne. Bag ved de almindelige Størrelsesaksiomer skimtes stadig Forestillingen om, at Ting kan bringes til Dækning (enten direkte eller ved Opløsning i Dele). Disse Ting kan være Liniestykker, Vinkler, Trekanter.

Og paa den Baggrund finder man sig ganske vel til Mode hos Euklid.

8. Een Ting vil man dog maaske indvende mod disse Betragtninger. Euklid har jo i sine 3 første Stykker, 1, 2, 3, stræbt at undgaa det almindelige Flytningspostulat, idet han endog vil bevise Muligheden af at flytte et Liniestykke, saaledes at det ene Endepunkt føres hen i et vilkaarligt givet Punkt. Ja vist! Men det er i fuld Overensstemmelse med, hvad Euklid gør alle Vegne. Han stræber at naa saa langt, som det nu kan lykkes ham, ved Hjælp af de først opstillede Forudsætninger, uden Brug af de senere opstillede.

Han har gennemført sine første 26 Beviser uden at benytte Postulat V, selv om visse Enkeltheder vilde forme sig simplere, hvis han straks tog dette Postulat i Brug. Noget lignende gælder om Eudoxos' Postulat (sædvanlig kaldet Archimedes Aksiom). Dette har jo endog i sin Tid foranlediget Zeuthen til — ganske vist i lidt for stor Iver efter at tilkende de gamle saa meget som muligt — at nævne Euklid som den egentlige Ophavsmand til den ikke-Euklidiske Geometri, den

Digitized by Google

ikke-Archimediske Geometri, o. s. v. Der findes ogsaa Geometrier, inden for hvilke Euklids 3 første Sætninger 1, 2, 3 gælder, medens Sætn. 4 ikke gælder. Geometrien paa en vilkaarlig Flade, hvor de geodætiske Linier opfattes som rette Linier, afgiver et Eksempel. At det ikke her gaar an, til Trods for, at Vinkelafsætningen er eentydig, at bygge en Konstruktion af kongruente Trekanter paa denne, og lade den saaledes bestemte eentydige Konstruktion træde i Stedet for et Flytningspostulat, turde være altfor indlysende.

9. Resultatet af de foregaaende Overvejelser er da: Euklid har opstillet Postulat IV til Brug ved Beviset for at Topvinkler er lige store.

For at kunne gennemføre dette Bevis har han desuden haft Brug for, at der i et Punkt af en Linie kan oprejses en vinkelret paa Linien. Dette udledes ved Hjælp af Undersøgelser, der væsentlig beror paa et Flytningsaksiom, som Euklid stiltiende har antaget, og som kan formuleres saaledes: En Trekant kan altid flyttes saaledes, at en af dens Sider bringes til Dækning med et givet lige saa stort Stykke, samtidig med, at Trekanten falder til en bestemt Side.

Spørgsmaalet bliver nu, om der heri kan findes noget inkonsekvent, om Postulat IV bliver overflødigt ved Siden af dette almindelige Flytningsaksiom. Ja, lad os nu høre, hvad senere Forfattere har ment derom.

10. I *Legendre*'s Geometri finder man som den allerførste Læresætning, der føres Bevis for, netop den, at alle rette Vinkler er lige store. Beviset ser saaledes ud (Fig. 1):

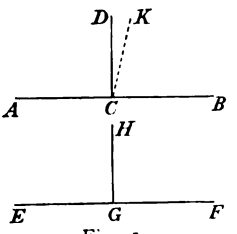


Fig. 1.

Lad CD være $\perp AB$ og $GH \perp EF$. Det paastaas da, at $\angle ACD$ og $\angle EGH$ er lige store. Man afsætter de 4 lige store Stykker CA, CB, GE og GF. AB maa da være lig EF, og Linien EF vil kunne lægges saaledes paa AB, at E falder i A og F i B. Disse 2 Linier EF og AB vil da falde helt sammen, da der ellers vilde være 2 rette Linier mellem A og B. Altsaa vil Midtpunktet G af EF ogsaa falde i Midtpunktet C af AB. Er nu paa denne

Digitized by Google

Maade GE lagt paa CA, saa paastaas det, at Linien GH maa falde ud ad CD. Thi lad den falde paa en anden Linie CK. Saa maatte, da $EGH = HGF$, $ACK = KCB$. Men Vinklen ACK er større end ACD, KCB mindre end DCB, men da $ACD = DCB$, vilde heraf følge $ACK > KCB$. Følgelig kan Linien GH ikke falde paa en fra CD forskellig Linie CK. Den falder da paa CD, og Vinklen EGH dækker altsaa ACD. Følgelig er alle rette Vinkler lige store, hvilket skulde bevises [1]).

Til dette Bevis er kun at bemærke, at det benytter et ret kompliceret Flytningspostulat. Dette er dog ikke udtrykkelig formuleret, men maa forudsættes at have omtrent følgende Indhold. Der eksisterer en Flytning, som fører et givet Liniestykke EF over i et andet lige saa stort Liniestykke AB, saaledes at ethvert Punkt paa en bestemt Side af EF føres over i et tilsvarende Punkt paa en bestemt Side af AB, og saaledes at ret Linie føres over i ret Linie.

11. *Hilbert* har i sin »Grundlagen der Geometrie«, Satz 15, den samme Sætning, at alle rette Vinkler er kongruente; og han tilføjer den Bemærkning, at Euklid — »meiner Meinung nach mit Unrecht« — har opstillet Sætningen blandt Axiomerne (Hilbert skelner ikke mellem Axiomer og Postulater). Den samme Mening havde altsaa Legendre, og ser man nærmere til, viser det sig, at der reelt er meget lidt Forskel paa Hilberts og Legendres Bevis [2]).

Hilberts Flytningsaksiom har følgende Indhold: Naar 2 Trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ har en Vinkel og de to hosliggende

---

[1]) *Saccheri* har opstillet et noget lignende Bevis. Et ældre Bevis af *Proklos*, som væsentlig beror paa, at en ret Vinkel ved Flytning altid vedbliver at være en ret Vinkel, er jo ikke meget værdt. Se *Heath*, The thirteen books of Euclids Elements, vol. I p. 200, hvor jeg dog ikke kan tiltræde Bemærkningen om, at Bevisets væsentlige Mangel skulde være den, at det bygger paa Forlængelsens Entydighed.

[2]) At Hilbert ikke har kendt Legendres Bevis saaledes som det ovenfor er gengivet, turde fremgaa af en Fodnote (Grundl. d. Geom. S. 17, 3. Aufl.), hvori han som Svar paa en Bemærkning af Vahlen om, at allerede Legendre har bevist Sætn. om de rette Vinkler, anfører, at Legendre forudsætter, at Vinklerne danner »ein stetiges Grössensystem«. Herpaa kan jeg nu ikke finde nogen anden Forklaring end den, at Hilbert maa have slaaet op i en senere Udgave af Legendre, hvor ganske vist Legendres oprindelige Bevis er blevet erstattet med en Kontinuitetsbetragtning.

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN

Sider stykkevis lige store, da vil ogsaa de andre tilsvarende Vinkler være stykkevis lige store.

Angaaende Indholdet af Hilberts øvrige Axiomer om Kongruens skal her kun bemærkes, at de i Hovedsagen gaar ud paa den entydige Afsætning af et Liniestykke ud fra et bestemt Punkt og til en bestemt Side paa en ret Linie gennem Punktet, og den entydige Afsætning af en Vinkel ud fra en given Halvlinie og til en bestemt Side, samt endelig for Liniestykkers Vedkommende Euklids Størrelsesaxiom 2.

12. Gangen i Hilberts Bevis er nu følgende:

Først vises, at naar 2 Vinkler α og β er lige store, er Nabovinklerne det ogsaa. Beviset føres ved, at man danner 2 Par parvis kongruente Trekanter, hvori de to Vinkler og deres Nabovinkler forekommer som ensliggende Vinkler. Derefter gennemføres Beviset i Tilknytning til Legendre's Figur saaledes: Vinklerne ACD, BCD; EGH, FGH er rette. Man afsætter $ACK = EGH$. Man har da efter den foregaaende Sætning ogsaa $BCK = FGH$, altsaa $ACK = BCK$. Derefter kan man ved Brug af Euklids Størrelsesaksiomer, anvendt paa Vinkler, straks se, at CK ikke kan være forskellig fra CD. Hilbert bruger ikke selve disse Størrelsesaksiomer for Vinkler, men beviser en dertil svarende Kendsgerning (at naar en Vinkel er delt i 2 andre, da vil en dermed kongruent Vinkel kunne deles i 2 med disse kongruente Vinkler)[1]. Men herpaa behøver vi ikke at gaa ind. Hovedsagen er den, at det gennem det Legendre-Hilbert'ske Bevis virkelig er godtgjort, at Euklid kunde undvære Postulat IV, naar han forudsætter Flytningspostulatet, hvad han jo alligevel maa gøre. Men ganske vist. Beviset kræver, at Flytningspostulatet stilles saa stærkt i Forgrunden, at det kommer til at bære saa godt som alle Beviser. Den Økonomi, som Euklid har lagt Vægt paa, og som blandt andet giver sig til Kende ved, at han kun bruger Flytning, naar det ikke lykkes ham at undgaa det, vilde altsaa gaa tabt. Det er derfor ikke sikkert, at Euklid havde følt sig tilfreds med dette Bevis. Men i hvert Fald maa man gøre sig klart, at Beviset ikke er let.

[1] Desuden opstiller Hilbert i Satz 14 den til Euklids Størrelsesaksiom 2 svarende Sætning for Vinkler. Formuleringen er imidlertid ukorrekt. Beviset er ikke gennemført, og der er navnlig ikke taget Hensyn til det Tilfælde, hvor der optræder »lige Vinkler«.

Digitized by Google

13. Zeuthen synes mest tilbøjelig til i egentlig systematisk Henseende at vurdere Post. IV lidet højt, idet han bemærker at »det af Definitionen paa en ret Vinkel fremgaar, at den er Halvdelen af en lige Vinkel, som vi nu kalder den, hvis Ben falder i hinandens Forlængelse, og at sige, at saadanne er lige store, er det samme som at sige, at en ret Linies Forlængelse ud over et Punkt (Postulat 2) er entydig bestemt«[1]). Idet jeg foreløbig ikke gaar ind paa den sidste Bemærkning, som jeg senere skal udtale mig om, kan jeg ikke fortolke Zeuthens Ord paa anden Maade end den, at det almindelige Legendre'ske Flytningspostulat, saaledes som det ovenfor (10) er omtalt at det kunde formuleres, lægges til Grund, saaledes at vi atter her ved en nøjagtig Udførelse af den Zeuthen'ske Tanke kommer til det Legendre-Hilbert'ske Bevis. At Euklid ikke omtaler lige Vinkler turde iøvrigt være vel overvejet. En lige Vinkel er efter Euklid ingen Vinkel. Og Grunden hertil kan alene være den, at Toppunktet for en »lige Vinkel« vilde være ubestemt. For at kunne anvende de almindelige Størrelsesaksiomer paa Vinkler er det nødvendigt, at Vinklerne har fælles Toppunkt. Ellers vilde nemlig det sidste Størrelsesaksiom være i Fare. (En Vinkel kan jo f. Eks. ved en Linie $\perp$ dens ene Ben deles i 2 Dele, hvoraf den ene er lig selve Vinklen). Det er derfor næppe uden virkelig Betydning, at Euklid har undgaaet den lige Vinkel.

14. Zeuthens sidste Bemærkning, at det, at lige Vinkler er lige store, er det samme som at sige, at en ret Linies Forlængelse er eentydig, er i hvert Fald ikke forstaaelig alene paa Grundlag af Størrelsesaksiomerne. Der gives Geometrier, hvor Forlængelsen er eentydig, og hvor rette Vinkler ikke altid er lige store, og der gives Geometrier, hvor alle rette Vinkler er lige store, men hvor den rette Linies Forlængelse ikke altid er eentydig. Eksempler herpaa skal anføres senere.

Det beror i det hele i nogen Grad paa Misforstaaelse, naar man har ment, at Sætningen om at alle rette Vinkler er lige store, kunde bruges til Bevis for, at et Liniestykkes Forlængelse er eentydig (eller omvendt). For at faa Klarhed paa dette Punkt, skal jeg gaa lidt nærmere ind derpaa.

---

[1]) Platon-Euklid, S. 275.

Digitized by Google

15. I Legendre's Geometri Sætn. 3 bevises det, at gennem 2 Punkter kan kun lægges een ret Linie. Og Beviset føres netop ved Hjælp af Sætn. 1, som siger, at alle rette Vinkler er lige store. Beviset ser saaledes ud: Lad A og B (Fig. 2) være fælles Punkter for to rette Linier. Disse maa nu for det første have hele Liniestykket AB fælles (hvilket forudsættes at ligge i Postulat 1, der forud er antaget). Tilbage staar at vise, at Forlængelsen er eentydig. Dette vises indirekte: Lad de to Linier skilles i C, og lad dem have Forlængelserne CE og CD. Gennem C drages CF saaledes, at $\angle ACF$ er ret. Man vil da have, at baade $\angle FCD$ og $\angle FCE$ skal være ret; men dette er umuligt, da den ene udgør en Del af den anden. Altsaa kan de to Forlængelser ikke være forskellige, hvilket skulde vises.

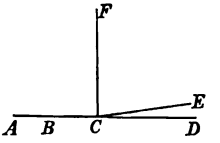


Fig. 2.

Til dette Bevis skal nu for det første gøres den Bemærkning, at Euklid jo overhovedet ikke godt kunde tale om Vinkler, som han gør i sine Postulater og Aksiomer, uden udtrykkelig at gaa ud fra, at Vinkelbenenes Forlængelser (i deres egen Retning) var eentydige. Ellers maatte man jo tale om Vinkler med korte og lange Ben. Hvad skulde $\angle ABC$ betyde, naar BA og BC kunde forlænges paa forskellig Maade ud over A og C? Det maatte jo da saa være en Forudsætning, at man kun talte om Vinkler mellem Halvlinier, der udgaar fra samme Punkt; og i saa Fald kunde der virkelig blive Tale om et Bevis som det ovennævnte. Men, som sagt, det ligger noget i Sagens Natur, at Euklid har maattet forudsætte paa Forhaand, at Liniestykkets Forlængelse ud over et Endepunkt var eentydig, før han overhovedet kunde tale om Vinkler. Legendre's Bevis er da ret beset ikke noget Bevis. Hvorledes skulde man kunne oprejse en vinkelret CF paa AC, naar ikke i Forvejen AC betyder en eentydig fastlagt til begge Sider forlænget Linie? Det var der jo ingen Mening i.

16. Det har endnu i denne Forbindelse en vis Betydning at omtale Euklids Definition af en Diameter i en Cirkel (Definition 17). Om denne Definition siger Zeuthen, »at den indeholder en Tilføjelse, som sikkert er overflødig, ej blot for at definere den, men overhovedet i Forudsætningerne. Det siges nemlig ikke blot, at den gaar gennem Centrum,

Digitized by Google

men tillige, at den halverer Cirklen. Dette er en Sætning, som kan bevises ved Kongruensen af de Dele, hvori Cirklen deles. Maaske har en senere Udgiver indskudt den i Definitionen, fordi den virkelig ikke findes i nogen af Euklids Læresætninger.«

Om den her omtalte Tilføjelse til Def. 17 skal jeg straks bemærke, at den hos Euklid ganske sikkert har en bestemt Betydning, men næppe nogen anden end den, at den tjener som Forklaring for Indførelsen af Betegnelsen »Halvcirkel«. Den nævnte Egenskab ved Cirklens Diameter kommer nemlig overhovedet ikke til Anvendelse paa anden Maade end i denne sproglige Udtryksform.

Men det har sin Interesse, at den staar hos Euklid som et Udtryk for en Selvfølgelighed. Og denne Selvfølgelighed peger atter hen paa det ikke udtalte Flytningspostulat. Naar Zeuthen bemærker, at Sætningen kan bevises ved Kongruensen af de Dele, hvori Cirklen deles, da maa man straks tilføje, at Euklid ikke direkte havde Midler til at føre et saadant Bevis. Hertil maatte kræves et Flytningspostulat af videregaaende Karakter end det, som angaar Trekanter.

17. Man kunde spørge, hvorledes Udtalelsen om, at de to Dele, hvori Diameteren deler Cirklen, skal være lige store, egentlig skal opfattes. Skal man tænke paa, at de to Halvcirkelflader er lige store, eller paa, at de to af dem dannede Figurer kan bringes til Dækning? Da det første vel imidlertid næppe kan indsés uden det sidste, vil jeg foretrække at tage den sidste Betydning som den fundamentale. Betydningen af Begrebet »Ligestorhed« hos Euklid er undertiden en saadan, at vi naturligst maa oversætte det ved Kongruens. Dette gælder her, og det gælder andre Steder. I 3. Bog har Euklid følgende Sætning (Sætn. 24):

Ligedannede Cirkelafsnit paa lige store rette Linier er indbyrdes lige store. (Ligedannede Cirkelafsnit er saadanne, som rummer lige store Vinkler).

Beviset føres ved en Flytning, der bringer de to Segmenter til Dækning, idet man benytter, at det i den foregaaende Sætning er vist, at paa den samme rette Linie vil der ikke kunne konstrueres 2 ligedannede og ulige store Cirkelafsnit til samme Side; det som her bevises, er da, at der ikke kan

Digitized by Google

være noget Punkt paa den ene Bue som ikke ogsaa ligger paa den anden (saaledes at »lige store« betyder »ved Flytning identisk med«). Det interessante er, at der her gøres explicit Brug af en Flytning af et Cirkelafsnit som Helhed. Her optræder altsaa et (ikke udtalt) Flytningspostulat, som gaar væsentlig videre end Trekantspostulatet hos Hilbert, og som snarere falder sammen med det mere omfattende Flytningspostulat, som maa underforstaas ved det tidligere nævnte Legendre'ske Bevis. I Modsætning til denne vidtgaaende Anvendelse af Flytning til Bevis for »Ligestorhed« træffer man i Indledningen til 3. Bog en Definition af lige store Cirkler som saadanne, der har lige store Radier. Men dette er jo kun en Gentagelse af den fra 1ste Bog kendte Dobbelthed, der synes at rumme en Inkonsekvens, men som er det menneskelig set naturlige Resultat af saa vidtgaaende formalistiske Bestræbelser, som dem, der skabte Euklids Værk.

18. Sætn. 24 i 3. Bog vidner saaledes om, at Euklid blandt de Selvfølgeligheder, han faktisk forudsatte, uden at nævne dem, men som han dog brugte med det størst mulige Maadehold — hvorved han iøvrigt fulgte et Økonomiprincip, som man i vore Dage overhovedet ikke respekterer — har haft et temmelig vidt gaaende Flytningsaksiom. Paa Baggrund af dette Aksiom bliver den i Definition 17 nævnte Egenskab, at Cirklens Diameter deler Cirklen i lige store (kongruente) Dele, en selvfølgelig Ting (der iøvrigt kan siges at være indbefattet i den anførte Sætn. 24 om Cirkelafsnittene), en Ting, der i sig selv rummer et specielt Flytningsaksiom, der ikke omvendt kan forudsættes at medføre det almindelige. Dette specielle Flytningsaksion skal i det følgende betegnes som Halvcirkel-Aksiomet.

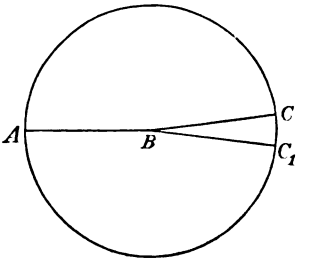


Fig. 3.

19. Nogen egentlig Anvendelse af Halvcirkel-Aksiomet gør Euklid ikke. Men *Proklos* har i sin Kommentar til Euklids 1ste Bog en meget interessant Anvendelse, idet han bruger det til at vise, at et Liniestykkes Forlængelse er eentydig. Lad det forelagte Liniestykke være AB (Fig. 3). Vi drager en Cirkel med B

Digitized by Google

som Centrum og BA som Radius. Havde nu AB 2 Forlængelser ud over B, da vilde disse Forlængelser møde Cirklen i 2 Punkter C og C_1, og da baade ABC og ABC_1 er Diameter i Cirklen, vil der fremkomme 2 Halvcirkler, hvoraf den ene udgør en Del af den anden. Som Følge heraf vilde hele Cirklen blive lig en af sine Dele, hvilket vilde stride imod de almindelige Størrelsesaksiomer.

Det, som Proklos her beviser, er altsaa, at naar 2 Linier har et Stykke AB fælles, da vil de ogsaa have en Forlængelse BC af Størrelsen AB fælles. Ved Gentagelse af Ræsonnementet kunde man derefter indse, at de yderligere vilde have en Forlængelse CD af Størrelsen $AC = 2 \cdot AB$ fælles, o. s. v. Idet man anvender Eudoxos Postulat (sædvanlig kaldet Archimedes' Aksiom), ses det da, at naar 2 rette Linier har et Stykke fælles, maa de falde helt sammen. Det har altsaa vist sig, at Forlængelsens Eentydighed virkelig kan bevises ved Halvcirkel-Aksiomet og Eudoxos' Postulat.

20. Blandt de Beviser, der i det hele er givet, for Sætningen om Forlængelsens Eentydighed, er ovenstaaende Bevis det eneste, der har nogen virkelig Interesse. De Indvendinger som Proklos formoder, at Zeno (af Sidon) vilde have fremkommet med, og som kortelig konkluderer i, at Beviset ikke har nogen Gyldighed før man har bevist Forudsætningen, at Diameteren halverer Cirkelen, er uden Betydning. *Heath* [1]) anerkender ikke Beviset, idet han udtaler, at »Proclus attempts to prove it, but unsuccessfully.« Men den Indvending han gør, synes mig uforstaaelig (»But the true objection to the proof above given is that the proof of the bisection of a circle by any diameter itself assumes that two straight lines cannot have a common segment; for, if we wish to draw the diameter of a circle which has its extremity at a given point of the circumference we have to join the latter point to the centre (Post. 1) and then to produce the straight line so drawn till it meets the circle again (Post. 2), and it is necessary for the proof that the produced part shall be unique«.) At det skulde have nogen Betydning for Gyldigheden af Proklos' Bevis, at man, hvis man omvendt vil bevise, at Cirklen halveres af en Diameter, formentlig har Brug for, at

[1]) The thirteen books of Euclid's Elements. I, Cambridge 1908, S. 197.

Digitized by Google

et Liniestykkes Forlængelse er eentydig, ser jeg ikke. Men selve denne Paastand, at et Bevis for Cirklens Halvering ved en Diameter kræver Eentydigheden af Liniestykkets Forlængelse, er ikke rigtig. I den Geometri, vi senere skal omtale, og hvor Punktet defineres ved 2 Koordinater af Formen $a + \varepsilon b$, hvor a og b er reelle Tal, $\varepsilon^2 = 0$, og hvor ret Linie, Afstand o. s. v. defineres analytisk som i den sædvanlige analytiske Geometri, gælder det, at Cirklen halveres af enhver Diameter, derimod gælder det ikke, at ethvert Liniestykke har en eentydig Forlængelse.

Sagen er i Virkeligheden den, at Proklos' Bevis ikke har nogen anden Mangel end den, som ovenfor er udbedret ved Tilføjelsen af, at det Eudox'ske Postulat maa anvendes for at Beviset kan blive helt gennemført.

21. Heath anfører overfor Proklos' Bevis et Bevis af *Saccheri*, som betegnes »very interesting as showing the thoroughness of his method, if not at the end entirely convincing.« Saccheris Bevis findes i hans berømte: Euclides ab omni naevo vindicatus, og er gengivet i forkortet Form paa det anførte Sted af Heath, fuldstændigt i Engel-Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895, S. 111—118. Jeg skal ikke her gaa nærmere ind paa dette meget vidtsvævende og ikke helt klare Bevis, hvis Kærnepunkt det ikke er let at faa fat paa; men jeg skal nøjes med at meddele mit eget Indtryk af Beviset:

Saccheri bygger sit Bevis 1) paa den Forudsætning, at naar en plan Figur skal flyttes i sin Plan saaledes, at et Liniestykke forbliver liggende fast (idet dets Endepunkter ligger fast), da er Flytningen kun mulig paa een Maade; 2) paa den Egenskab ved den rette Linie, at den er »ens paa begge Sider«, uden at det dog træder klart frem, hvad der egentlig menes hermed. Herom kan det for det første siges, at der ikke er noget overraskende i, at man paa dette Grundlag kan vise Forlængelsens Eentydighed, men for det andet, at en klar Formulering og anskuelig Reduktion og Revision af det i de nævnte Forudsætninger indeholdte Materiale ikke kan føre til synderligt andet end netop Proklos' Bevis.

Naturligvis kan Proklos' Bevis, om man vil, ved Indførelse af passende Kontinuitetsbetragtninger i Stedet for Størrelsesaksiomernes Anvendelse paa en saa »kompliceret« Figur som

Digitized by Google

Cirklen, bringes i nærmere Overensstemmelse med mere moderne Former; men dette spiller ingen væsentlig Rolle. Beviset rummer i sig selv den Grundbetragtning, hvorved man af Kongruensforudsætninger kan udlede Eentydigheden af Liniestykkets Forlængelse. Men Bevisets fuldstændige Gennemførelse kræver Eudoxos' Postulat; og at man ikke kan komme udenom dette, skal blive eftervist i det næste Foredrag.

22. I det følgende Foredrag skal jeg endvidere gaa nærmere ind paa, hvilken Betydning Halvcirkelaksiomet i det hele vil kunne have som Flytningsaksiom, naar det føjes til Euklids øvrige udtrykkelig opstillede Postulater og Aksiomer. I dette Foredrag skal jeg endnu kun til Slutning give et Indtryk af den samlede Rækkevidde af Euklids 5 Postulater og de 5 Størrelsesaksiomer uden Tilføjelse af noget Flytningsaksiom. Det er blevet sagt, at det 4de Postulat skulde kunne opfattes som almindeligt Flytningspostulat[1]); at det ikke for Plangeometriens Vedkommende, hvorom her alene kan være Tale, kan have en saa vidtrækkende Betydning, skal vises i det følgende.

23. Vi danner en Maalgeometri paa følgende Maade: Der findes noget som kaldes rette Linier (eller kort: Linier). Gennem 2 vilkaarlige Punkter gaar der een og kun een ret Linie. 2 Linier, der ikke skærer hinanden, kaldes parallele. Gennem et Punkt uden for en Linie gaar der een og kun een ret Linie parallel med Linien. Hver ret Linie forsynes med en Maalestok d. v. s. ved hvert af dens Punkter tænkes staaende et reelt Tal, og til hvert reelt Tal skal paa denne Maade svare et Punkt paa Linien. Ordnede Punkter svarer til (efter Størrelse) ordnede Tal. Afstanden mellem 2 Punkter er den numeriske Differens mellem de to Tal, der svarer til Punkterne paa den Linie, der forbinder dem. Maalestokkene kan vælges helt uafhængigt af hverandre.

Vinkler maales ogsaa ved Tal efter følgende Regler: Ud fra hvert Punkt gaar uendelig mange Retninger (Halvlinier); hver af disse forsynes med et Tal, saaledes at samtlige Retninger ud fra Punktet, tagne i en bestemt Omløbsretning for-

[1]) Saaledes udtaler Heath i ovennævnte Værk (vol. I, p. 200), »this postulate must be taken as equivalent to the principle of invariability of figures or its equivalent, the homogeneity of space.«

Digitized by Google

synes med Tal fra 0 til 360; Forbindelsen mellem Retningerne og Tallene er een-eentydig undtagen for een Linie, der baade bærer Tallet 0 og 360 (svarende til en sædvanlig Cirkelinddeling). Vinklen mellem 2 Halvlinier kan da let fastsættes; i Stedet for en lang Forklaring vil jeg sige kort: saaledes som man plejer at gøre det ved en graderet Cirkel. Omkring hvert Punkt fastlægges saaledes en independent Vinkelmaaling for Retninger, der udgaar fra Punktet.

24. Vi vælger nu 2 faste, hinanden skærende rette Linier x og y som »Koordinatakser«; deres Skæringspunkt O betegnes som Begyndelsespunkt. Et vilkaarligt Punkt P bestemmes ved Maaltallene for de Stykker, der afskæres fra O paa Linierne x og y til Skæringspunkterne med Linier gennem P parallele med henholdsvis y og x, idet disse Maaltal forsynes med Fortegn i Overensstemmelse med faste »Retninger« paa Koordinatakserne. De saaledes fortegnbestemte Maaltal x og y betegnes som P's Koordinater. Vi afbilder nu vor Geometri paa den sædvanlige aritmetiske Plan (den Euklidiske »Parameterplan«, hvor hvert Punkt er et reelt Talsæt (x, y), og hvor rette Linier defineres ved Ligninger af første Grad, Afstande ved det kendte Kvadratrodsudtryk), saaledes at Punktet P afbildes paa Punktet (x, y) i denne.

De rette Linier i den geometriske Plan vil da i den analytiske Plan afbildes ved et System af ∞^2 Kurver i denne (Billedlinierne). Ud fra hvert Punkt i Planen kan paa de derigennem gaaende Billedkurver afsættes Buer, der svarer til den geometriske Længde 1, og Endepunkterne af disse Buer vil danne en Punktsamling (Enhedskurven), der fremstiller det analytiske Billede af den geometiske Cirkel med Radius 1, og derfor kan kaldes Billedcirklen med Radius 1.

25. Vælger man Billedlinierne og deres Maalestokke, og man graderer Enhedskurven om hvert Punkt, svarende til den Vinkelmaaling, man vil fastlægge omkring Punktet, har man i den analytiske Plan (Parameterplanen) et Billede af Maalgeometrien. At man her staar overfor mangfoldige Muligheder, er indlysende. Men hvorledes man end indretter Maalingerne, naar blot de anførte Regler overholdes, vil samtlige Størrelsesaksiomer have Gyldighed, baade for Afstande og Vinkler. De simpleste Eksempler paa saadanne Maalgeometrier faar

Digitized by Google

man ved at vælge de analytiske rette Linier i Parameterplanen som Billedlinier. Postulaterne I og II er da straks opfyldte. III vil ogsaa være det, uafhængigt af, hvorledes Enhedskurverne vælges. Kun maa Enhedskurven altid være underkastet den Betingelse, at enhver Linie gennem Enhedskurvens »Centrum« indeholder 2 Punkter af Kurven, eet paa hver Side af Centrum.

Det fjerde Postulat behøver derimod ikke at gælde.

Men man kan naturligvis fastsætte saadanne specielle Regler for Vinkelmaalingerne, at det vil komme til at gælde. Hvis man fastsætter den Regel, at modstaaende Punkter paa Enhedskurven skal have Graderingstal, hvis Differens er 180, saaledes, at »lige Vinkler er lige store«, da maa ogsaa rette Vinkler være lige store. Men som man ser kan alt dette fastsættes ganske som man vil, og paa forskellig Maade ud fra forskellige Punkter. Og det til Trods for, at Liniens Forlængelse her paa Forhaand er eentydig. Der er altsaa ikke nogen logisk Forbindelse mellem Eentydigheden af Liniens Forlængelse og Ligestorheden af rette Vinkler (jf. Bem. herom S. 34).

26. Vi vil nu imidlertid fastsætte, at Postulat IV skal være tilfredsstillet.

Efter hvad vi har fastsat om Vinkelmaaling i Almindelighed har det en bestemt Betydning at afsætte en Vinkel lig en given ud fra en given Halvlinie og til en bestemt Side. Da man ogsaa kan tale om Summen og Differensen af to Vinkler, og de almindelige Størrelsesaksioner er overholdt, vil det 5. Postulat ogsaa gælde.

I et Punkt af en Linie er der een og kun een vinkelret paa Linien. Topvinkler er lige store (jf. Euklid I 13, 14, 15). Naar en Vinkel er ret, er ikke blot den ene Nabovinkel ret; den anden maa ogsaa være det. Naar $a \perp b$, maa altsaa ogsaa $b \perp a$.

Men Enhedskurven om O kan vælges ganske uafhængigt heraf. Og det følger da allerede af denne Betragtning, at de 5 Postulater og de 5 Aksiomer ikke er tilstrækkelige til at fastlægge Euklids Geometri. Selv om man ogsaa tilføjer et Postulat om, at i et Punkt af en Linie er der een og kun een vinkelret paa Linien. Der findes intet i disse Forudsætninger, hvorved der fastlægges nogen Afhængighed mellem Størrelser

Digitized by Google

af Sider og Vinkler i en Trekant. Vi nævner nogle Eksempler paa saadanne Maalgeometrier:

Eks. 1. Vinkelmaalingen er den samme som i Parameterplanen. Enhedskurven er en analytisk Cirkel i Parameterplanen. Geometrien vil da være ganske som den Euklidiske.

Eks. 2. Vinkelmaalingen er som i Parameterplanen. Enhedskurven er en Ellipse. Det er da klart, at Sætningen om den ligebenede Trekant ikke vil gælde (idet 2 Halvdiametre i Ellipsen i Almindelighed ikke er lige store i Parameterplanen).

Eks. 3. Vinkelmaalingen er som i Parameterplanen. Enhedskurven om $O = (0, 0)$ bestaar af 2 parallele Linier $y = \pm 1$ samt de to Punkter $A = (1, 0)$ og $B = (-1, 0)$. En retvinklet Trekant OAP med Vinkelspidserne $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $P = (1, 1)$, vil da være ligesidet.

Eks. 4. Vinkelmaalingerne er som i Parameterplanen. Afstandsmaalingerne ligesaa, med Undtagelse af saadanne Afstande som falder paa et ganske bestemt Liniestykke AB, hvor Maalestokken indrettes anderledes. Hele den Euklidiske Geometri vil da gælde, naar blot de betragtede Figurer ikke indeholder Afstande, der falder paa det »farlige« Liniestykke.

27. Saalænge Enhedskurverne ikke underkastes særlige Betingelser kan der altsaa i vor Geometri meget vel forekomme retvinklede Trekanter, hvor Hypotenusen er mindre end eller lig med en af Kateterne. Lad os nu imidlertid begrænse Mulighederne netop ved at forlange, at i en retvinklet Trekant skal Hypotenusen altid være større end enhver af Kateterne, eller hvad der er det samme, at den korteste retlinede Vej fra et Punkt til en ret Linie er den vinkelrette. Hvilke Betingelser vil Enhedskurven derefter være underkastet?

Lad Enhedskurvens »Centrum« være O, OA en »Radius«, idet A er et Punkt paa Kurven. Den vinkelrette l paa OA i A maa da vise sig som en Støttelinie til Kurven; $OA = 1$ er nemlig den korteste retlinede Afstand fra O til l. Enhedskurven ses altsaa at have en Støttelinie i ethvert af sine Punkter d. v. s. Enhedskurven er konveks. Omvendt vil den vinkelrette fra O ned paa enhver Støttelinie til Kurven træffe Linien i dens Røringspunkt med Kurven (nemlig i det Punkt, der har den mindste retlinede Afstand fra O; mere end eet saadant Punkt ses det let, at der ikke kan være Tale

Digitized by Google

om. Enhedskurven er altsaa en konveks Kurve uden Knæk og uden retlinede Stykker. Da de to Støttelinier i diametralt modsatte Punkter maa være parallele (Linier $\perp$ samme tredje kan ikke skære hinanden), ses det tillige, at Enhedskurven er selvsymmetrisk med Hensyn til O, d. v. s. den har i Punktet O et virkeligt Centrum (i Parameterplanen). Da $a \perp b$ skal medføre $b \perp a$, ses det tillige, at Enhedskurven har den Egenskab, at naar en Radius er draget parallel med Tangenten i en anden Radies Endepunkt, da maa det ogsaa gælde omvendt, at den anden Radius er parallel med Tangenten i den første Radies Endepunkt (de to Radier kan da kaldes konjugerede). Omvendt er det let at se, at en Oval, der har denne Egenskab, altid kan være Enhedskurve i en Geometri, hvori Euklids 5 Postulater og 5 Aksiomer gælder, og hvor man desuden vil have, at i en retvinklet Trekant Hypotenusen altid er større end enhver af Kateterne. Det vil derfor have nogen Interesse at undersøge, hvorledes almindelige Ovaler af denne Art (Ovaler med konjugerede Radier) kan bestemmes, og vi skal nu gaa lidt nærmere ind paa dette Spørgsmaal.

28. Det er for det første klart, at Cirklen har den nævnte Egenskab. Vælges Cirklen som Enhedskurve, vil Geometrien under de anførte Betingelser netop være den Euklidiske. Ellipsen har den samme Egenskab. Vælger man den som Enhedskurve, vil Geometrien under de anførte Betingelser atter være den Euklidiske, idet dens analytiske Billede ved en affin Transformation kan bringes over i det forrige Billede, hvor Cirklen var Enhedskurve. Men foruden Ellipsen eksisterer der uendelig mange andre andre Ovaler af denne Art, saaledes som vi nu skal se.

29. Først betragter vi konvekse Polygoner, som har en tilsvarende Egenskab. Vi søger en Polygon som er selvsymmetrisk med Hensyn til et Punkt O. Polygonen skal altsaa have parvis lige store og parallele modstaaende Sider. Ethvert Liniestykke, der forbinder Centret O med et Punkt af Polygonens Omkreds, betegnes som en Radius. To modsatte Radier udgør en Diameter. Polygonen skal nu have den Egenskab, at naar 2 Radier er saaledes valgt, at den ene er

Digitized by Google

parallel med en Støttelinie i Endepunktet af den anden, da skal ogsaa omvendt den anden være parallel med en Støttelinie i Endepunktet af den første (de to Radier kaldes konjugerede). Fig. 4 viser en Sekskant $ABCDEF$, som har den forlangte Egenskab. De tre Hoveddiagonaler er parallele med de tre Par modstaaende Sider. Den brudte Linie ABC og Siden FA er konjugerede (d. v. s. geometriske Steder for Endepunkter af konjugerede Radier). Af denne Sekskant vil man nu let kunne aflede en ny Polygon, der ogsaa har konjugerede Radier, idet man ved Linien B_1B_2 bortskærer B_1BB_2; gennem F drages $F\beta \fallingdotseq OB_1$ og gennem A $A\beta \fallingdotseq OB_2$, hvorefter

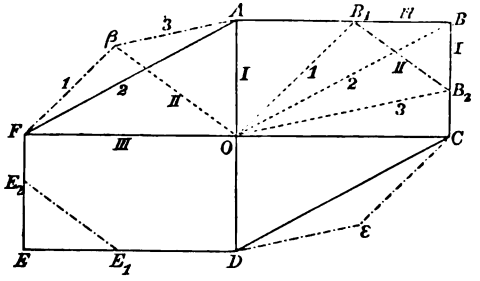


Fig. 4.

$F\beta AB_1B_2C$ ved Symmetri med Hensyn til O giver Begrænsningen for en ny Polygon med konjugerede Radier. Dette følger af, at

$$F\beta \fallingdotseq OB_1, \quad A\beta \fallingdotseq OB_2, \quad FA \fallingdotseq OB, \quad OA \fallingdotseq B_2B,$$
$$OF \fallingdotseq B_1B.$$

Man har altsaa 2 fuldstændige Firkanter $OAF\beta$ og OB_1BB_2, hvori 5 Par Sider er parallele; det 6te Par vil da ogsaa være parallele, d. e.

$$O\beta \fallingdotseq B_1B_2;$$

og herved er da netop bevist, at den nye Polygon ogsaa har den forlangte Egenskab. Ved paany at borskære en Spids af denne Polygon og iøvrigt at gaa frem paa den samme Maade som ovenfor, kan man danne lignende Polygoner med flere Sider. Og ved en Grænseovergang herfra vil vi da vise, hvorledes man kommer over til de egentlige Ovaler.

30. Fig. 5 viser en konveks Bue AC uden Knæk. OA og OC er parallele med Tangenterne i henholdsvis C og A.

Digitized by Google

Det er nu Hensigten at konstruere en Oval, som indeholder den givne Bue AC, og som har konjugerede Radier. For at gøre dette begynder vi med en Polygon; Tangenterne i A og C skærer hinanden i B. Den brudte Linie ABC er konjugeret med FA, saaledes at $FABC$ og den dermed symmetriske brudte Linie med Hensyn til O frembringer en Polygon med konjugerede Radier. Denne Polygon skal være den første Tilnærmelse til den søgte Oval. B_1B_2 er en Tangent til Buen AC, skærende AB og BC i henholdsvis B_1 og B_2. Gennem Endepunktet F af $OF = OC$ drages $F\beta \fallingdotseq OB_1$ og gennem A $A\beta \fallingdotseq OB_2$. $F\beta A$ og AB_1B_2C er konjugerede, saaledes at $F\beta AB_1B_2C$ udgør Halvdelen af en konveks Polygon med konjugerede Radier. Denne konvekse Polygon skal være 2den Tilnærmelse til den søgte Oval. 3dje Tilnærmelse

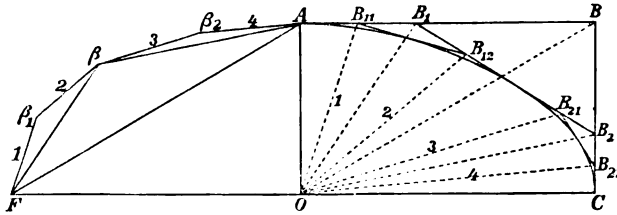


Fig. 5.

kommer vi til paa følgende Maade: Af den fundne Polygon afskæres Spidserne B_1 og B_2 ved to Linier henholdsvis $B_{11}B_{12}$ og $B_{21}B_{22}$, begge Tangenter til Buen AC. Gennem F drages Linien $F\beta_1 \fallingdotseq OB_{11}$, og gennem β Linien $\beta\beta_1 \fallingdotseq OB_{12}$; endvidere drages gennem β Linien $\beta\beta_2 \fallingdotseq OB_{21}$, og gennem A $A\beta_2 \fallingdotseq OB_{22}$. Derved er dannet Halvdelen $F\beta_1\beta\beta_2AB_{11}B_{12}B_{21}B_{22}C$ af den Polygon, som skal give 3dje Tilnærmelse til den søgte Oval. Det er nu klart, hvorledes man fortsætter. I Kvadranten AOC omskrives om Buen AC konvekse brudte Linier (B-Linier) med flere og flere Sider, saaledes at samtlige Vinkler, hvorunder Siderne ses fra O, konvergerer mod Nul. Til hver af B-Linierne konstrueres en tilsvarende β-Linie, saaledes at de to brudte Linier har parvis konjugerede Radier. B-Linien i Kvadranten AOC konvergerer mod den givne konvekse Bue AC. Den tilsvarende β-Linie i Kvadranten AOF konvergerer da mod en anden konveks Bue AF; dette følger af, at Samlingen af alle de Punkter, som »indfanges« af samtlige β-Linier udgør et konvekst Omraade (naar 2 Punkter kan indfanges,

Digitized by Google

vil ogsaa det Liniestykke, der forbinder dem, indfanges). Og da samtlige Vinkler, hvorunder B-Liniens Sider ses fra O, konvergerer mod Nul, samtidig med at Vinklen mellem 2 paa hinanden følgende af β-Liniens Sider overalt gaar mod Nul, følger heraf at Buen AF intet Knæk kan have. Buerne AF og AC er konjugerede d. v. s. Radierne kan parres sammen saaledes, at hver Radius er parallel med Tangenten i Endepunktet af den tilsvarende Radius. Dette følger umiddelbart af, at de approximerende brudte Linier, sammenhørende B-Linie og β-Linie er konjugerede. De to Buer udgør da tilsammen Halvdelen af den søgte Oval. Det ses altsaa, at man til enhver konveks Bue AC (uden Knæk og uden rette Liniestykker), hvis Totalkrumning er mindre end 180^0, altid vil kunne konstruere en tilsvarende Bue AF, og derved en hel Oval, hvis Radier parvis er konjugerede. Gennem A og C drages nemlig blot Linier parallele med Tangenterne i henholdsvis C og A; disse Linier skærer hinanden i O, og man gaar nu frem som ovenfor.

31. Lad os nu antage, at vi til at begynde med har ladet Enhedskurven være en Cirkel. Vi forandrer derefter den ene Kvadrant lidt, saaledes at vi i Stedet for en lille Bue PQ (Fig. 6) sætter en anden konveks Bue med de samme Tangenter i P og Q. For at opretholde Egenskaben med de konjugerede Radier maa vi da ogsaa foretage en Forandring med den anden Cirkelkvadrant, idet Buen P_1Q_1 ($OP_1 \perp OP$, $OQ_1 \perp OQ$) maa erstattes med en konveks Bue konjugeret med den ny-indførte Bue PQ. Den første approximerende brudte Linie for Buen PQ er PRQ; for Buen P_1Q_1 er det Korden P_1Q_1. Og ved en ganske lignende Fremgangsmaade som ovenfor kommer man herfra let over til de følgende approximerende brudte Linier.

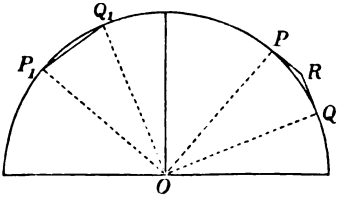


Fig. 6.

Lægger man nu den saaledes ændrede Cirkel og alle Ovaler, der kan dannes deraf ved Parallelforskydning, til Grund for en Maalgeometri, da vil denne Geometri tilfredsstille samtlige Sætninger i den Euklidiske Geometri saalænge man ikke betragter Figurer, der indeholder rette Linier i de farlige Ret-

Digitized by Google

ninger d. v. s. i de Retninger, der angives ved Radier til Buerne PQ og P_1Q_1.

I denne Geometri gælder da uindskrænket:

1) Euklids 5 Postulater og 5 Størrelsesaksiomer.

2) I et Punkt af en Linie kan altid oprejses en vinkelret paa Linien.

3) I en retvinklet Trekant er Hypotenusen større end enhver af Katæterne, hvoraf følger, at

4) den retlinede Afstand mellem 2 Punkter er mindre end enhver brudt Linie med de samme Endepunkter.

5) Der eksisterer et Kvadratnet i 2 hvilke som helst paa hinanden vinkelrette Retninger.

Desuden vides det, at Flytningsaksiomet for Trekanter vil gælde, i hvert Fald saa længe Trekantssiderne ikke antager visse specielle Retninger.

Men samtlige disse Egenskaber viser sig altsaa utilstrækkelige til at bære den hele Euklidiske Geometri.

Cirklens isoperimetriske Ulighed paa Kuglefladen.

Af T. Bonnesen.

Paa en Kugleflade med Radius 1 vil en Cirkel med den sfæriske Radius ρ have Længde og Areal bestemt ved $p = 2\pi \sin\rho$ og $f = 2\pi(1 - \cos\rho)$, medens et Udsnit i denne Cirkel svarende til Vinklen v vil have Buelængde og Areal lig $v\sin\rho$ og $v(1 - \cos\rho)$.

I et Kuglebelte med den sfæriske Bredde ρ, som begrænses af en Storcirkel og en Lillecirkel $\left(\text{med Radius} = \frac{\pi}{2} - \rho\right)$ er Lillecirklens Længde og Beltets Areal bestemt ved $p = 2\pi\cos\rho$ og $f = 2\pi\sin\rho$ For et Udsnit i dette Belte svarende til en Storcirkelbue af Længden a er Buelængden paa Lillecirklen og Udsnittets Areal lig $a\cos\rho$ og $a\sin\rho$.

Vi betragter en ikke cirkelformet sfærisk konveks Kurve K. Den deler Kuglefladen i to Dele, hvoraf den ene er indeholdt i en Halvkugle. Denne Del vil vi betegne som K's Indre. Det tilsvarende Areal kaldes f, og Længden af K kaldes p. I Følge den klassiske Isoperimetri vil den Cirkel paa Kugle-

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN

fladen, som har samme Perimeter p som K, have et større Areal, hvilket udtrykkes ved Uligheden

$$M - (2\pi - f)^2 + p^2 > (2\pi)^2. \tag{1}$$

Kun for Cirklens Vedkommende er $M = (2\pi)^2$.

Hensigten med det følgende er at bevise Uligheden

$$M - (2\pi - f)^2 + p^2 \geq (2\pi)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{R - r}{2}\right), \tag{2}$$

hvor R er sfærisk Radius i den mindste Cirkel C, som indeholder K, r Radius i den største Cirkel c, som indesluttes af K. Om C og c bemærkes, at de har mindst 2 Punkter fælles med K og af denne deles i Buer $\leq 180^0$.

Vi gaar ud fra en konveks Polygon K og konstruerer dens ydre Parallelkurve K_ρ i Afstanden $\rho < \frac{\pi}{2}$. Denne ukonvekse Kurve er sammensat af Cirkelbuer med Radius ρ og Centrer i Vinkelspidserne og af andre Cirkelbuer med en Side til Ækvator og i Afstanden ρ fra denne. For Arealet $F = F(\rho)$ og Perimeteren $P = P(\rho)$ af K_ρ kan man direkte beregne følgende Udtryk

$$2\pi - F(\rho) = (2\pi - f)\cos\rho - p\sin\rho, \tag{3}$$

i

$$P(\rho) = (2\pi - f)\sin\rho + p\cos\rho, \tag{4}$$

det man blot behøver at benytte de i Begyndelsen fundne Buelængder og Arealer og tillige udtrykke f ved Vinkelsummen i K. Ved Grænseovergang ses disse Formler at gælde for alle konvekse Kurver. Det bemærkes, at K_ρ for $\rho < \frac{\pi}{2}$ ikke faar Dobbeltpunkter, og at (3) giver det geometriske Areal af K.

Største Indercirkel c_ρ og mindste Ydercirkel C_ρ til K_ρ er koncentriske med henholdsvis c og C og har Radierne $r + \rho$ og $R + \rho$.

Sættes først $\rho = \frac{\pi}{2} - R$ og derefter $\rho = \frac{\pi}{2} - r$, bliver C_ρ og c Storcirkler, som af K deles i Buer, der er $\leq \pi$, og Perimetrene af de tilsvarende K_ρ er derfor større end Storcirklen. Af (4) følger derfor

$$(2\pi - f)\cos R + p\sin R > 2\pi,$$
$$(2\pi - f)\cos r + p\sin r > 2\pi.$$

Digitized by Google

Da Maksimum af $P(\rho)$ i Følge (4) er $\sqrt{M}$, har man altsaa for det første, at $M > (2\pi)^2$, og man kan for det andet slutte, at der findes to Værdier $\rho = \rho_1$ og $\rho = \rho_2$ saaledes, at

$$0 < \rho_1 < r < R < \rho_2 < \pi,$$

for hvilke $P(\rho_1) = P(\rho_2) = 2\pi$. Sættes i (4)

$$2\pi - f = \sqrt{M}\cos\varphi, \qquad p = \sqrt{M}\sin\varphi$$

findes ρ_1 og ρ_2 som Rødder i Ligningen

$$\sqrt{M}\sin(\rho + \varphi) = 2\pi.$$

Hvis denne har Rødderne $\rho_1 + \varphi = u$, $\rho_2 + \varphi = \pi - u$, $(0 < u < \pi)$, faar man

$$R - r < \rho_2 - \rho_1 = \pi - 2u$$

$$\cos(R - r) > \cos(\rho_2 - \rho_1) = -\cos 2u = \frac{2(2\pi)^2}{M} - 1.$$

$$M > (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R - r}{2}\right).$$

Hermed er Uligheden bevist for konvekse Polygoner, og ved Grænseovergang ses 2) at gælde for alle konvekse Kurver.

For konvekse Kurver er den højere Grænse for $2\pi - f$ og for p lig 2π, og den højere Grænse for M er altsaa $2(2\pi)^2$. Den højere Grænse for højre Side af (2) er ogsaa $2(2\pi)^2$, nemlig for $R = \frac{\pi}{2}$, $r = 0$. Lader vi K være en sfærisk Tokant med Vinklen v, bliver $R = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{v}{2}$. For $v = 0$, antager baade højre og venstre Side i (2) Værdien $2(2\pi)^2$ som Grænsetilfælde, og for konvekse Kurver gælder altsaa Uligheden

$$2(2\pi)^2 \geqq M \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R - r}{2}\right).$$

Heraf følger, at der ikke eksisterer nogen Ulighed af samme Form som (2) med en større Koefficient til Ledet $\operatorname{tg}^2\frac{R - r}{2}$ end $(2\pi)^2$.

Paa en Kugleflade med Radius a antager (2) Formen

$$\left(2\pi - \frac{f}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{a}\right)^2 \geqq (2\pi)^2\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{R - r}{2a}\right).$$

Digitized by Google

Denne kan tjene til Udledelse af den isoperimetriske Ulighed i Planen, idet man projicerer den plane Kurve ind paa en Kugleflade med Radius a, som rører Planen, anvender den ovenstaaende Formel paa Projektionen og foretager Grænseovergang til Planen, idet $a \to \infty$. Derved genfinder man den i en tidligere Afhandling opstillede Ulighed

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \pi \left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

Felix Bernstein benytter i sin Afhandling »Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene« [1]) ogsaa Parallelkurver og tænker sig ρ bestemt saaledes, at $F(\rho) = 2\pi$. Man kan da let indse, at K_ρ maa gaa gennem mindst et Par diametralt modsatte Punkter paa Kuglefladen og derfor maa $P(\rho) > 2\pi$. Heraf følger straks (1), idet nemlig M er invariant overfor Transformationen (3) og (4). Ved helt andre Betragtninger udledes en anden lavere Grænse for $P(\rho)$ end 2π, og derved fremkommer *Bernsteins* svagere Ulighed

$$M \geqq (2\pi)^2 + 8\pi \sin^2 \frac{R-r}{4(1+2\pi)}.$$

22. April 1921.

Nogle Bemærkninger om de Dirichletske Rækkers ligelige Konvergens.

Af Harald Bohr.

Ved en »almindelig« Dirichletsk Række forstaas som bekendt en uendelig Række af Formen

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad (1)$$

hvor $s = \sigma + it$ betegner en kompleks Variabel, og hvor Koefficienterne a_n er vilkaarlige komplekse Tal, medens Eksponenterne λ_n er reelle Tal, der opfylder Betingelserne

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_n \cdots \qquad (\lambda_n \to \infty).$$

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), p. 117—36.

Digitized by Google

Det er klart, at dersom en Række (1) er absolut konvergent i et Punkt $s_0 = \sigma_0 + it_0$, da er den ogsaa absolut konvergent i ethvert Punkt $s = \sigma + it$, for hvilket $\sigma \geqq \sigma_0$; thi for $\sigma \geqq \sigma_0$ er jo

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| \leqq |a_n e^{-\lambda_n s_0}|.$$

Heraf følger, at en Dirichletsk Række (1) — hvis den da ikke specielt er konvergent for alle Værdier af s eller ikke er konvergent for nogen Værdi af s — besidder en absolut Konvergensabscisse σ_A, d. v. s. der findes et Tal σ_A saaledes, at (1) er absolut konvergent for $\sigma > \sigma_A$, men ikke for $\sigma < \sigma_A$. De to førnævnte specielle Tilfælde inddrages naturligt under det almindelige Tilfælde, nemlig ved henholdsvis at sætte $\sigma_A = -\infty$ og $\sigma_A = +\infty$.

Langt dybere end denne Sætning ligger den bekendte Sætning af Dr. *Jensen*[1]), i Følge hvilken ogsaa selve Konvergensomraadet for Rækken (1) er en Halvplan begrænset af og liggende til højre for en ret Linie $\sigma = \sigma_B$ vinkelret paa den reelle Akse. En Dirichletsk Række (1) har altsaa ikke blot en absolut Konvergensabscisse σ_A, men ogsaa en (betinget) Konvergensabscisse σ_B. Det er klart, at $\sigma_B \leqq \sigma_A$, og det kan f. Eks. indtræffe, at $\sigma_A = +\infty$, medens $\sigma_B < \infty$, altsaa at Rækken besidder et Konvergensomraade uden nogetsteds at være absolut konvergent.

Som først bevist af den franske Matematiker *Cahen* er enhver Dirichletsk Række ligelig konvergent i ethvert endeligt Omraade, der ligger helt tilhøjre for Konvergenslinien $\sigma = \sigma_B$. Derimod behøver Rækken ikke at være ligelig konvergent i hele Halvplanen $\sigma > \sigma_B + \varepsilon (\varepsilon > 0)$, og jeg har derfor i en tidligere Afhandling[2]) indført en tredje Konvergensabscisse, den ligelige Konvergensabscisse σ_C, defineret som nedre Grænse for de Abscisser σ_0, for hvilke det gælder, at Rækken er ligelig konvergent i hele Halvplanen $\sigma > \sigma_0$ (og ikke blot i enhver begrænset Del deraf). Idet (1) øjensynlig er ligelig konvergent i enhver Halvplan $\sigma > \sigma_A + \varepsilon$, hvor vi jo har en konvergent Majorantrække i $\sum |a_n| e^{-\lambda_n(\sigma_A + \varepsilon)}$, er $\sigma_C \leqq \sigma_A$, og der gælder altsaa Uligheden $\sigma_B \leqq \sigma_C \leqq \sigma_A$.

[1]) J. L. W. V. Jensen, Om Rækkers Konvergens. Tidsskrift for Matematik, Ser. 5, Bd. 2, 1884, Side 70.

[2]) Über die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen. Crelles Journal Bd. 143, Side 203.

Digitized by Google

Som jeg har vist i den ovenfor citerede Afhandling, spiller den ligelige Konvergenslinie $\sigma = \sigma_C$ en særlig Rolle for de Dirichletske Rækker, idet Beliggenheden af denne Linie — i Modsætning til de to andre Konvergenslinier $\sigma = \sigma_A$ og $\sigma = \sigma_B$ — kan bestemmes paa yderst simpel Maade udfra Kendskabet til den ved Rækken fremstillede analytiske Funktion. I den foreliggende lille Note skal jeg ikke komme ind paa dette Forhold, men skal fra et andet Synspunkt vise Betydningen af Indførelsen af den ligelige Konvergensabscisse, idet jeg skal vise, hvorledes man i talrige af de (indbyrdes ret forskelligartede) Sætninger om Dirichletske Rækker, der begynder saaledes: »For enhver Dirichletsk Række med $\sigma_B < \infty$, d. v. s. som ikke er overalt divergent, gælder det, at hvis Rækken ogsaa besidder et **absolut** Konvergensomraade, d. v. s. hvis ogsaa σ_A er $< \infty$, da er $\cdots$« uden videre kan erstatte de udhævede Ord med »hvis Rækken ogsaa besidder en **ligelig** Konvergensplan, d. v. s. hvis ogsaa σ_C er $< \infty$.« Dette betyder en væsentlig Reduktion af Forudsætningerne, idet Betingelsen $\sigma_C < \infty$ ingenlunde medfører, at ogsaa $\sigma_A < \infty$. Den fremsatte Paastand begrundes paa følgende Maade:

Den Brug man ved de Sætninger, jeg tænker paa, gør af Antagelsen om, at den betragtede Række (1) har en absolut Konvergensplan, bestaar udelukkende i, at man derudfra slutter, at for »meget« store Værdier af Abscissen σ vil de første Led i Rækken (1) fuldstændig overveje Resten, idet vi herved forstaar, at dersom N er et vilkaarligt fast positivt helt Tal, vil Rækkens Sum $f(s)$ kunde skrives paa Formen

$$f(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} + e^{-\lambda_N s} \cdot R(s), \qquad (2)$$

hvor $R(s) \to 0$ for $\sigma \to \infty$, d. v. s. hvor $|R(s)| < \varepsilon$ for alle s, hvis Abscisse σ er større end et vist Tal $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon, N)$. Hvad det drejer sig for os om at vise er altsaa, at for at kunne slutte om den ved Ligning (2) definerede Funktion $R(s)$, at den $\to 0$ for $\sigma \to \infty$, er det tilstrækkeligt at vide om Rækken (1), at σ_C er $< \infty$ (i Stedet for at σ_A er $< \infty$). Dette kunde synes umiddelbart indlysende, idet man kunde være fristet til at

Digitized by Google

slutte saaledes: Den Dirichletske Række, der fremstiller Funktionen $R(s)$, nemlig Rækken

$$e^{\lambda_N s} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_N)s}, \tag{3}$$

besidder en ligelig Konvergenshalvplan, fordi Rækken (1) jo er forudsat at gøre det, og paa Grund af denne ligelige Konvergens af Rækken (3) for alle Værdier s med tilstrækkelig stor Abscisse σ, har vi derfor Lov til at udføre Grænseovergangen $\sigma \to \infty$ ved at gaa til Grænsen med hvert enkelt Led i (3) for sig, hvorved vi straks finder $R(s) \to 0$, idet enhver af Eksponenterne $\lambda_n - \lambda_N (n = N+1, N+2, \cdots)$ jo er positiv. Dette vilde imidlertid ikke være en tilladelig Slutningsmaade, og Fejlen ligger naturligvis deri, at vi ud fra den ligelige Konvergens af den givne Række (1) for $\sigma > \sigma_c + \varepsilon$, eller hvad der er det samme af Rækken

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{4}$$

ikke uden videre kan slutte, at Rækken (3) ogsaa er ligelig konvergent for $\sigma > \sigma_c + \varepsilon$, idet den Faktor $e^{\lambda_N s}$, hvormed vi har multipliceret (4) for at komme til (3), jo ikke er begrænset i Halvplanen $\sigma > \sigma_c + \varepsilon$, men tværtimod vokser ud over alle Grænser for $\sigma \to \infty$. Vi kan imidlertid vise — og hermed vil da ogsaa selve vor Paastand være bevist — at Rækken (3) dog i Virkeligheden vil være ligelig konvergent i Halvplanen $\sigma > \sigma_c + \varepsilon$. Hertil benytter vi en Hjælpesætning, som jeg ved anden Lejlighed[1]) har bevist, og som i sig selv frembyder en vis Interesse, nemlig at dersom en Dirichletsk Række vides at være ligelig konvergent blot paa en enkelt lodret Linie $\sigma = \sigma_0$ (naturligvis paa hele Linien og ikke blot paa ethvert begrænset Stykke af den), da vilRæk-

[1]) I arstellung der gleichmässigen Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe als Funktion der Koeffizienten der Reihe. Archiv der Math. und Phys., Række III, Bd. XXI, S. 326. I denne Afhandling bevises den nævnte Hjælpesætning ganske vist kun for de egentlige Dirichletske Rækker $\sum \frac{a_n}{n^s}$ (der svarer til $\lambda_n = \log n$), men Beviset gælder uforandret i det almindelige Tilfælde.

Digitized by Google

ken af sig selv være ligelig konvergent ogsaa i hele Halvplanen $\sigma > \sigma_0$. Denne Hjælpesætning kan vi anvende paa Rækken (3) og Tallet $\sigma_0 = \sigma_C + \varepsilon$. Dens Forudsætning, nemlig at Rækken er ligelig konvergent paa Linien $\sigma = \sigma_0$, er nemlig opfyldt, idet Rækken (4) jo vides at være det, og den Faktor $e^{\lambda_N \varepsilon}$, hvormed vi har multipliceret (4) for at komme til (3), jo er **begrænset** paa den lodrette Linie $\sigma = \sigma_0$ (i Modsætning til i hele Halvplanen $\sigma > \sigma_0$). Hjælpesætningen lærer os derfor, at (3) er ligelig konvergent i hele Halvplanen $\sigma > \sigma_C + \varepsilon$, og dermed er da Beviset for vor Paastands Rigtighed ført.

Litteraturanmeldelser.

Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Erster Band, herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski. Verlag Julius Springer, Berlin 1921. — 612 Sider.

Den 12. December 1918 fejrede Professor Felix Klein i Göttingen sit 50-aarige Doktorjubilæum. I denne Anledning overraktes der ham af en større Kreds af Matematikere en Adresse ledsaget af en Pengesum, som var bestemt til Fremme af en samlet Udgave af hans matematiske Afhandlinger. Nu foreligger paa Springers Forlag første Bind af denne paa 3 Bind beregnede Udgave, besørget af Prof. Dr. Robert Fricke, hvis Navn er knyttet til Kleins, og Dr. Alexander Ostrowski, som Klein særlig havde valgt til Hjælper ved denne afsluttende Oversigt over et langt og indholdsrigt videnskabeligt Livsarbejde. Men denne Udgave er ingenlunde en udtømmende Fremstilling af Kleins Livsværk; hans Arbejdsmaade er det mest udprægede Samarbejde med Venner og Disciple; det bør ikke glemmes, at Klein ad denne Vej har øvet mindst ligesaa stor Indflydelse paa Matematikens Fremskridt, som gennem sine egne Publikationer.

— Der indledes med 14 Afhandlinger henhørende til Liniegeometrien. Da Klein i 1866 kom til Bonn som Plückers Assistent (i Fysik), var denne sysselsat med at fremstille sit System for Geometrien, ved hvilket ikke Punktet eller Planen, men den rette Linie benyttes som Rummets Element. Klein droges ind i disse Undersøgelser, særlig ogsaa da han efter

Digitized by Google

Plückers Død i 1868 maatte fuldføre Udgivelser af dennes Værk om Liniegeometrien, og blev saaledes i Tidens Løb fra Fysiken helt draget over til Matematiken. — En ret Linies Beliggenhed overfor et Koordinatsystem bestemmes ved 4 Konstanter; men af Hensyn til Symmetrien er det fordelagtigt, at anvende 6 homogene »Koordinater« for den rette Linie, som derfor — svarende til Antallet ∞^4 af rette Linier i Rummet — tilfredsstiller en identisk Ligning. En yderligere Ligning (af Graden n) i disse Koordinater bestemmer et »Liniekompleks« (af Graden n); dette omfatter ∞^1 rette Linier gennem ethvert Punkt i Rummet, og disse danner en Kegle (af Graden n) i dette Punkt. I sin Afhandling for Doktorgraden (Bonn 1868) giver Klein en Klassifikation af Liniekomplekserne af anden Grad ved Hjælp af en kanonisk Form for vedkommende Ligning. — Studieophold i Göttingen, Berlin, Paris i de følgende Aar bringer en Række Afhandlinger, som fører Kompleksernes Teori videre; særlig Venskabet med Nordmanden Sophus Lie virker frugtbringende og skaber Forbindelsen med Differentialgeometrien: Et Liniekompleks af anden Grad bestemmer som ovenfor nævnt en Kegle af anden Grad i ethvert Punkt i Rummet. De Punkter, i hvilke denne Kegle udarter til to Planer gennem Punktet, kaldes Kompleksets singulære Punkter; de to Planers Skæringslinie kaldes Kompleksets til vedkommende singulære Punkt svarende singulære Linie. Disse singulære Punkter danner i deres Helhed en Flade af fjerde Orden og Klasse, Kompleksets »Singularitetsflade« (»Kummersche Fläche«). Denne Flade S er som Singularitetsflade fælles for et System af ∞^1 Komplekser af anden Orden. Lad K være et af disse Komplekser, P_K et Punkt paa S, for hvilket den ved K bestemte singulære Linie gennem P_K — der er Tangent til S — falder i Retning af den ene af de asymptotiske Kurver paa S gennem P_K. Denne Kurve vil da i sin Helhed bestaa af saadanne Punkter P_K og viser sig at være en Kurve af 16de Orden. Da man imidlertid til en hvilkensomhelst given Tangent til S altid kan finde et Kompleks K i ovennævnte System, der indeholder vedkommende Tangent som singulær Linie, ses det, at man paa denne Maade kan udlede alle asymptotiske Kurver paa S ved at erstatte K med alle Komplekser i ovennævnte System. Da imidlertid Problemet at finde de asymptotiske Kurver paa S er ækvivalent med dette Problem: at finde Krumningskurverne paa en til-

Digitized by Google

svarende anden Flade, frembyder der sig den Opgave at forklare disse Afhængighedsforhold ved den dybere Sammenhæng mellem Liniegeometri og metrisk Geometri. Denne beror paa det algebraiske Særpræg, de har tilfælles. Men den geometriske Synsmaade, Klein benytter sig af for at fremstille dette, viser os samtidig Vejen til de følgende Undersøgelser om Geometriens Grundlag.

De seks homogene Liniekoordinater kan tillige opfattes som Punktkoordinater i et femdimensionalt Rum R_5. Den identiske Ligning, som de efter deres Definition tilfredsstiller, er af anden Orden, bestemmer altsaa en firedimensional Mangfoldighed M_4 af anden Orden i R_5. Denne svarer altsaa til »Linierummet«, d. v. s. ethvert af dens Punkter svarer entydigt til en ret Linie i det sædvanlige Rum R_3 og omvendt. Liniegeometriens analytiske Behandling vil derfor svare til den analytiske Behandling af Geometrien i denne M_4; og denne kan vi atter henføre til en plan Mangfoldighed R_4, f. E. ved stereografisk Projektion. Lad os nedsætte Dimensionstallene med 2 for at se, hvordan dette plejer at ske: En Flade M_2 af anden Orden i det sædvanlige Rum R_3 (f. E. en Kugle) overføres ved Projektion fra et af dens Punkter (Nordpolen N) til en Plan uden for dette (Ækvatorialplanen P). De rette Linier paa M_2 (imaginære for Kuglens Vedkommende) fremstilles atter som rette Linier i P undtagen de to, som gaar igennem Projektionspunktet N; disse udarter til 2 Punkter i P. Nu fremstaar den metriske Geometri i Planen netop ved, at to Punkter (de uendelig fjærne Cirkelpunkter) fremhæves; den svarer altsaa til Geometrien paa M_2, saasnart eet Punkt paa M_2 (Projektionspunktet) fremhæves. Paa samme Maade vil den metriske Geometri i R_4, der benytter en Flade af anden Orden som Fundamentalfigur, svare til Geometrien paa M_4 i R_5, efter at eet af dennes Punkter er fremhævet; den vil altsaa svare til Liniegeometrien, efter at een ret Linie i det sædvanlige Rum er fremhævet. Man har altsaa kun behov at udvikle den ene af disse to tilsyneladende vidtforskellige Geometrier og vil saa uden Vanskelighed kunne overføre dens Udsagn paa den anden. Til en geometrisk Sætning i R_4, der ikke er af metrisk Natur, vil der svare en liniegeometrisk Sætning, i hvilken der ikke sker Fremhævelse af nogen ret Linie. Som Eksempel overfører Klein Dupin's Teorem om, at i et tredobbelt Ortogonalsystem af Flader

Digitized by Google

disse skærer hinanden to og to efter Krumningskurverne, til Liniegeometriens Omraade og kommer derved til Resultater, der kaster et nyt Lys paa de før nævnte Undersøgelser over Kummer's Flade. — Denne Maade at jævnføre de forskellige matematiske Discipliner paa, ikke efter deres Genstand, men efter deres Metoder, var Kleins Særpræg og betød et stort systematisk Fremskridt.

Bogens anden Del omfatter Kleins Afhandlinger om Geometriens Grundlag. Til Gauss' og Lobatschewsky's ikkeeuklidiske Geometri (i Rummet med negativ Krumning) havde Riemann føjet en ny Art (i Rummet med positiv Krumning). Striden stod om disses Forhold til »Virkeligheden«. Gik Helmholtz i dette Øjemed ud fra de faste Legemers Bevægelser, den metriske Geometri, saa kunde man med samme Ret tage Projektivgeometrien, Lysstraalens Egenskaber, til Udgangspunkt. Det viste sig da, at Projektivgeometrien kunde udvikles paa Grundlag af de tre forskellige metriske Teorier, at den altsaa var uafhængig af nogetsomhelst Aksiom om Parallelismen. Klein drog den Konsekvens af v. Staudts Undersøgelser over Projektivgeometrien, som denne mærkeligt nok var veget tilbage for: at rense Projektiogeometrien helt for metriske Begreber.

Til 3 givne Punkter A, B, C paa en ret Linie l kan man uden Hjælp af metriske Begreber ad rent projektiv Vej konstruere et Punkt D, som er harmonisk forbundet med A med Hensyn til Parret B, C. Ved paa denne Maade stadig at konstruere fjerde harmoniske Punkt til 3 allerede foreliggende Punkter, vil man ud fra A, B, C opnaa en uendelig (tællelig) Mængde Punkter, som overdækker l overalt tæt. Man kan nu bringe en enentydig Afhængighed til Veje mellem disse Punkter og de rationale Tal, »Tallet« ∞ medindbefattet, ved at holde sig til følgende Regel: naar x_1, x_2, x_3 svarer henholdsvis til A, B, C, da skal der til D svare det Tal x, som tilfredsstiller den lineære Ligning

$$(x - x_2)(x_1 - x_3) = -(x - x_3)(x_1 - x_2)$$

o. s. f. Saaledes faar ethvert af de konstruerede Punkter paa l et rationalt Tal som »Koordinat«, og til ethvert rationalt Tal svarer et af de konstruerede Punkter paa l. Man kan nu udvide denne Afhængighed til at gælde mellem alle reelle Tal og alle Punkter paa l ved Hjælp af et Aksiom, der jævn-

Digitized by Google

stiller de reelle Tals Kontinuitet med Kontinuiteten paa den rette Linie. Har man to rette Linier l og l^1, der bærer saadanne projektive Koordinatsystemer x henholdsvis x^1, da vil en projektiv Overgang fra l til l^1 svare til en lineær Transformation fra x til x^1. Dermed er Grundlaget for en fuldstændig analytisk Behandling af Projektivgeometrien givet. — Denne Konstruktion af den projektive Skala er ikke et særligt Kunstgreb, der kun skal tjene til at slippe udenom metriske Begreber. Tværtimod benyttes nøjagtig den samme Fremgangsmaade ved Konstruktionen af en metrisk Skala: Man vælger to Punkter A og B, som faar Koordinater 0 og 1; det uendelig fjærne Punkt, C, faar stiltiende ∞ som Koordinat. $D = 2$ og $A = 0$ er da harmonisk forbundne med Hensyn til Parret $B = 1$ og $C = \infty$, d. v. s. $AB = BD$ o. s. v. Udvidelsen af den metriske Skala til at omfatte alle reelle Tal kræver ganske det samme Aksiom som ovenfor nævnt.

Hvorledes føjer de forskellige metriske Teorier sig da nu ind i den fælles Projektivgeometri? Her drog Klein Nytte af Cayley's Fremgangsmaade at definere et metrisk System i Planen ved Hjælp af et Keglesnit som Fundamentalfigur, nemlig ved at kalde to Figurer »kongruente«, naar den ene kan bringes til Dækning med den anden ved Hjælp af en projektiv Transformation, ved hvilken det fundamentale Keglesnit forbliver uændret. Det samme kan ske i n Dimensioner, naar man vælger en kvadratisk Form i n Variable som Fundamentalform. Vælges i Rummet en reel eller imaginær konveks Flade af anden Orden som Fundamentalfigur, da fremstaar netop de to ovennævnte ikke euklidiske Geometrier, medens den euklidiske Geometri staar som Overgangsled midt imellem dem i Tilfælde af, at denne Flade af anden Orden udarter til Kuglecirklen. (For at der kun skal fremstaa disse 3 Arter af metrisk Geometri, kræves endvidere, at det skal være muligt at dreje en Plan om en i Planen liggende ret Linie, indtil den vender tilbage til Udgangsstillingen[1]), hvad vor Erfaring jo netop kræver.) Dette var ikke blot en Fortolkning af de ikkeeuklidiske Geometrier indenfor den euklidiske Geometris Begreber, altsaa et Bevis for deres logiske Uangribelighed, men ligefrem en Klarlæggelse af deres inderste Væsen — og tillige af den euklidiske Geometris.

[1]) »at det skal være muligt at danse« som Klein engang sagde.

Digitized by Google

Klein var ikke den første, som gav et Bevis for de ikkeeuklidiske Geometriers Modsigelsesfrihed. Beltrami havde fundet en fuldstændig Analogi til Lobatschewsky's Geometri ved at erstatte de rette Linier i Lobatschewsky's Plan med de geodætiske Linier paa Flader med konstant negativ Krumning. Ved passende Valg af Koordinater paa disse Flader kan man opnaa, at de geodætiske Linier fremstilles ved lineære Ligninger, og den analytiske Geometri i Lobatschewsky's Plan vil da ved Fortolkning i disse Koordinater give et fuldstændigt Billede af de ikkeeuklidiske Forhold paa en krum Flade i det euklidiske Rum. Analogien har dog sine Grænser ved, at en saadan Flade frembyder uundgaaelige Singulariteter og derfor ikke kan give et Billede af den ikkeeuklidiske Plan i sin Helhed. Riemanns Art af ikkeeuklidisk Geometri genkendes paa samme Maade i den sfæriske Geometri. Denne Fortolkning vinder i Interesse ved, at man paa samme Maade traf paa Billeder af den euklidiske Plan indenfor de ikkeeuklidiske Geometrier: Lobatschewsky's »Grænsekugle« i Rummet med negativ Krumning og Clifford's Flade i Rummet med positiv Krumning. Overfor det tilsyneladende tilfældige, som laa i disse Analogier, var den principielle Betydning, Kleins Resultater havde, denne, at de forskellige metriske Geometrier nu kunde opfattes som ligestillede Provinser i Projektivgeometriens Omraade. Cayley's Ord om, at »descriptiv geometry is all geometry«, fik først derved sin rette Betydning. Denne Erkendelse borttog den sidste Rest af det mystiske Skær, som indtil da stadig laa over de ikkeeuklidiske Teorier; i matematisk Henseende kunde der ikke mere indvendes noget imod dem, de blev tværtimod til værdifulde Hjælpemidler i næsten alle matematiske Discipliner: her skal blot mindes om den Nytte, Klein og Poincaré drog af den ikkeeuklidiske Fremstillingsmaade i Funktionsteorien.

Men hvilken Geometri havde nu Gyldighed i »Virkeligheden«? Man kan karakterisere Metriken i et ikkeeuklidisk Rum ved den Talværdi, en bestemt Differentialinvariant, Rummets »Krumning«, antager. I det euklidiske Rum er dens Talværdi Nul, og dens Talværdi vil derfor i Almindelighed angive, hvor stærkt Rummets Metrik er forskellig fra den euklidiske. Til et givet Omraade, der begrænser vor Erfaringsverden, vil der altid svare en Variabilitet for Talværdien for Rummets Krumning af det Omfang, at de Forskelle, den frem-

Digitized by Google

Studenterforeningens Bibliotek

kalder i de metriske Forhold indenfor det nævnte Omraade, falder indenfor Grænserne for vore Maalingers Nøjagtighed. De forskellige Teorier er altsaa i denne Henseende i og for sig ligeberettigede, saalænge vi kun har Forholdene i det begrænsede Omraade for Øje, vore Erfaringer raader over. Med Hensyn til Rummet som Helhed har de forskellige Teorier vidt forskellige Konsekvenser. Her løser Klein til Fuldstændighed Problemet, hvilke topologiske Sammenhængsforhold der kan være mulige, eftersom vi gaar ud fra, at Rummets Krumning er en positiv eller negativ Konstant eller Nul. — Klein har udviklet disse Ideer i alle Enkeltheder i en lang Række af Afhandlinger og Forelæsninger med en saa overbevisende Kraft, at de nu kan siges at være blevet Matematikernes Fælleseje. — I filosofisk Henseende er Klein i denne Sag nærmest en Syntese af Empirisme og Rationalisme: de geometriske Aksiomer er fornuftige Idealiseringer af Erfaringens og Anskuelsens Udsagn. Klein siger om sig selv, at han ikke har kunnet tilvejebringe tilstrækkelig megen sorgløs Ligegyldighed overfor Virkeligheden til at blive moderne Aksiomatiker.

Første Binds tredie og sidste Afsnit grupperer sig om »Erlanger Programm«, den klassiske Afhandling, som den 23-aarige Klein i 1872 forelagde Universitetet i Erlangen, da han tiltraadte sit Professorat der, og hvis Grundtanker ogsaa spores i de to forudgaaende Afsnit. Det er den Udvikling, der paabegyndtes i Samarbejdet med Lie, som nu fører til en Sammensmeltning af de to Matematikeres Tænkemaade i »Erlanger Programm«. Der var i det 19de Aarhundrede kommet ny Fart i Geometriens Udvikling, tildels gennem Læren om den ikkeeuklidiske Geometri, tildels gennem en Række fremragende Matematikere i Frankrig (Monge, Poncelet m. fl.), eller rettere sagt, det var enkelte Udviklingsretninger, som forfulgtes med stigende Interesse, men som ikke havde stort mere end Navnet Geometri tilfælles. Her lykkedes det Klein ud fra den geometriske Udvikling, han havde været Vidne til og selv havde været med i, at finde Nøglen til Forstaaelse af de enkelte Retningers Betydning og indbyrdes Forhold:

De geometriske Forhold og Egenskaber, som Geometrerne af de forskellige Lejre efterspører ad tilsyneladende vidt forskellige Veje, har deres Betydning alene i dette, at de er invariante overfor en bestemt Gruppe af Transformationer, d. v. s. at hvis en Figur er i Besiddelse af en bestemt geo-

Digitized by Google

metrisk Egenskab, da vil enhver Figur, der fremstaar af den første ved Hjælp af en Transformation af den tilsvarende Gruppe, frembyde den samme Egenskab. Jo mindre omfattende en Gruppe er, desto mere speciel er den Geometri, der svarer til den. Overgangen fra et geometrisk Trin til et mere specielt, f. E. fra Projektivgeometrien til den metriske Geometri, sker altsaa ved at udvælge en tilsvarende Undergruppe i den foreliggende Transformationsgruppe. Der vil da kunne findes en geometrisk Figur, som forbliver uændret ved denne og kun ved denne Undergruppe, og de specielle geometriske Egenskaber er da saadanne, som bestemmes i Henhold til denne Figur. Saaledes kendetegnes de metriske Transformationer som saadanne projektive Transformationer, ved hvilke den fundamentale Flade af anden Orden, som bestemmer den tilsvarende euklidiske eller ikkeeuklidiske Metrik, forbliver uændret. Foreligger der to Mangfoldigheder og to Transformationsgrupper, der karakteriserer deres geometriske Behandlingsmaade, og kan man ved en passende Transformation overføre den ene Mangfoldighed til den anden saaledes, at ogsaa de to Grupper kommer til at svare til hinanden, da vil de to Geometrier være fuldstændig ækvivalente med hinanden; til enhver Sætning i den ene svarer en bestemt Sætning i den anden. Saaledes har vi før ved Liniegeometriens Behandling set, at den metriske Geometri i Planen svarer fuldstændig til den projektive Behandling af en Flade af anden Orden, efter at eet af dennes Punkter er blevet fremhævet.

Dermed var al geometrisk Granskning knyttet sammen til en organisk Helhed, hvor hver enkelt Retning fandt sin Plads i Systemet. Ikke nok dermed. I 1901 drog Klein Mekaniken med ind under de samme Synspunkter. Men den største Triumf kunde Kleins banebrydende Program fejre, da ogsaa Fysiken endte med at karakterisere sine Systemer ved Hjælp af de Transformationsgrupper, ved hvilke Naturlovenes Form ikke ændres, — den Udvikling, som udmunder i Einsteins Relativitetsteori. Ogsaa her omfattedes de enkelte Systemers Forhold til hverandre i fuldstændig Klarhed af »Erlanger Programm«. Det er bekendt, at den 70-aarige Klein ikke modstod Fristelsen til at gribe ind i disse Aars brændende Spørgsmaal angaaende Geometriens Sammensmeltning med Fysiken. Det er fire Afhandlinger om dette Emne, Bogen slutter med. *J. Nielsen.*

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN

Danske Eksamensopgaver.

Skoleembedseksamen ved det matematisk-naturvidenskabelige Fakultet.
II Del (ældre Ordning), Januar 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 1.

1. Idet Potensrækken

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

har sin Konvergensradius større end Nul, skal man vise, at det samme gælder

$$\log f(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

og angive, hvad der bestemmer denne Potensrækkes Konvergensradius. Find dernæst Rekursionsformler til successiv Bestemmelse af Koefficienterne b_n ved de givne Koefficienter a_n.

Eks. $f(x) = \cos x$.

2. Vis, at to algebraiske Kurver af 3. Orden φ og ψ, der ligger i samme Plan og gaar gennem de samme 3 Punkter A, B, C af en ret Linie l, almindeligvis skærer hinanden i 6 andre Punkter, der er beliggende paa et Keglesnit. Vis, at dette Keglesnit, naar φ og l ligger fast, medens ψ gennemløber et Kurvebundt, der har 3 af sine Grundpunkter i A, B og C, vil gennemløbe et Keglesnitsbundt.

Løsninger.

1. Da $f(x)$ er analytisk og forskellig fra Nul i Omegnen af Begyndelsespunktet, maa $\log f(x)$ ligeledes være analytisk i dette Omraade, og altsaa eksisterer der en Potensrække af den angivne Form.

Radius i denne sidste Potensrække er enten lig med Konvergensradius i den første eller lig med den mindste numeriske Værdi af Rødderne i $f(x) = 0$.

Differentieres denne sidste Række med Hensyn til x, faas

$$f'(x) = (b_1 + 2b_2x + \cdots + nb_nx^{n-1} + \cdots)f(x),$$

hvoraf ved Anvendelse af Cauchys Multiplikationsregel, og idet man søger Koefficienten til x^n, den søgte Rekursionsformel

$$(n+1)a_{n+1} = (n+1)b_{n+1} + na_1b_n + (n-1)a_2b_{n-1} \cdots + 2a_{n-1}b_2 + a_nb_1, \qquad n > 0;$$

for $n = 0$ faas derimod $a_1 = b_1$.

Digitized by Google

I Eksemplet faar Potensrækken Konvergensradius $\frac{\pi}{2}$, og Rekursionsformlen giver $b_{2n+1} = 0$ og

$$\frac{(-1)^n}{(2n-1)!} = 2n b_n - \frac{(2n-2)\, b_{2n-2}}{2!} + \frac{(2n-4)\, b_{2n-4}}{4!} - \ldots . + \frac{(-1)^{n-1}\, 2 b_2}{(2n-2)!}.$$

2. 1ste Spørgsmaal kan besvares med Henvisning til en bekendt Sætning, men vises i øvrigt direkte saaledes:

De to givne Kurver φ og ψ bestemmer et Bundt

$$\varphi + \lambda\psi = 0,$$

hvor λ kan bestemmes saaledes, at Ligningen tilfredsstilles af et nyt Punkt D paa l. Den herved frembragte Kurve maa da opløse sig i l og et Keglesnit, hvilket sidste maa gaa gennem de 6 øvrige Skæringspunkter for φ og ψ.

Lader man nu ψ gennemløbe et Bundt

$$\psi_1 + k\psi_2,$$

vil ovenstaaende Betragtning kunne anvendes paa hvert Keglesnit i Bundtet. Ligningen

$$\varphi(D) + \lambda(\psi_1(D) + k\psi_2(D)) = 0,$$

bestemmer

$$\lambda = -\frac{\varphi(D)}{\psi_1(D) + k\psi_2(D)},$$

og det søgte Keglesnit faas da ved, at man udskiller den faste Linie l af Kurven

$$(\psi_1(D) + k\psi_2(D))\,\varphi - \varphi(D)\cdot\psi = 0,$$

hvorved man faar tilbage Ligningen for et Keglesnitsbundt (Parameter k).

Opgave i Matematik, Nr. 3.

En tynd, homogen cirkulær Skive med Radius a, Masse m, ruller i sin Plan paa en ret Linie l, saaledes at Centrum ved denne Bevægelse faar konstant Hastighed u. Samtidig drejes Skivens Plan om l med konstant Vinkelhastighed ω. Vis, at den øjeblikkelige Bevægelse kan fremstilles ved en Rotation, og bestem Rotationsaksen og Vinkelhastigheden. Find endvidere Skivens levende Kraft.

Bestem de Flader, der danner de geometriske Steder for de øjeblikkelige Rotationsakser, saavel i det faste som i det bevægelige System, og undersøg, om de to Flader kan udfoldes paa hinanden.

Digitized by Google

Løsning.

Den øjeblikkelige Rotation sammensættes af 2, den givne Rotation ω paa l, og en Rotation $\frac{u}{a}$ paa en Linie $\perp$ Cirklens Plan.

Rotationsaksens Projektion paa Cirklens Plan er l, og dens Vinkel α med l bestemmes ved

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u}{a\omega}.$$

Rotationens Størrelse er

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{u^2}{a^2}}.$$

Den levende Kraft findes, efter det sædvanlige Princip om Delingen, at være

$$\tfrac{1}{2}m(a^2\omega^2 + u^2) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}ma^2(\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha)\cdot\omega_1^2 = \tfrac{1}{8}m(6u^2 + 5a^2\omega^2).$$

Det ene af de to geometriske Steder for Rotationsaksen bliver en Omdrejningshyperboloide med Cirklen som Strubecirkel. Det andet bliver en Skrueflade med l som Akse. Den første Flade vil ved at tage Del i den foreliggende Bevægelse rulle paa den anden, saaledes at det allerede derved er klart, at den ene Flade kan udfoldes paa den anden. Det er iøvrigt ogsaa let direkte at finde overensstemmende Udtryk for de to Fladers Linieelementer.

I Del, Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 1.

1. En Skruelinies Tangenter danner en Vinkel med Skrueaksen, hvis tangens er $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Paa Skruelinien tænkes bestemt 2 Punkter, hvis Oskulationsplaner er vinkelrette paa hinanden. Angiv, hvor stor en Del af en Skruegang, der svarer til den mellem Punkterne liggende Bue.

2. En Flade er i retvinklede Koordinater x, y, z givet ved Parameterfremstillingen

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3,$$
$$y = 3v + 3vu^2 - v^3,$$
$$z = 3u^2 - 3v^2.$$

Vis, at Fladen er en differentiabel Flade.

Find Ligningen for Fladens Tangentplan i et vilkaarligt Punkt, svarende til givne Værdier af u og v. Beregn derefter Arealet af den Del af Fladen, der i Parameterplanen (u, v) afbildes ved et Kvadrat med Vinkelspidserne (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Digitized by Google

Løsninger.

1. Vi betragter Skrueliniens Retningskegle og opsøger 2 paa hinanden vinkelrette Tangentplaner. Roringsfrembringernes vandrette Billeder danner en Vinkel paa 120^0. Altsaa udgør den søgte Bue $\frac{1}{3}$ af en Skruegang.

2. Man har

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3 + 3v^2 - 3u^2, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 6vu,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 6uv, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 3 + 3u^2 - 3v^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 6u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -6v.$$

$$A(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -36uv^2 - 18u - 18u^3 + 18uv^2 = -18u(1 + u^2 + v^2).$$

$$B(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = 36u^2v + 18v + 18v^3 - 18u^2v = 18v(1 + u^2 + v^2).$$

$$C(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 9 - 9(u^2 - v^2)^2 - 36u^2v^2 = 9(1 - u^2 - v^2)(1 + u^2 + v^2).$$

Da disse Størrelser ikke samtidig er Nul, er Fladen differentiabel. Tangentplanens Ligning

$$-2u(X - x) + 2v(Y - y) + (1 - u^2 - v^2)(Z - z) = 0$$

eller

$$-2uX + 2vY + (1 - u^2 - v^2)Z = (v^2 - u^2)(3 + u^2 + v^2).$$

$$\text{Arealet} = \int_0^1 \int_0^1 9(1 + u^2 + v^2)^2 du dv = 26{,}6.$$

Opgave i Matematik, Nr. 2.

1. Find Værdien af det bestemte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^{n+1}},$$

hvor n er positiv hel, α og β positive Konstanter.

2. Vis, at den bikvadratiske Ligning

Digitized by Google

$$x^4 - x + 1 = 0$$

har alle sine Rødder imaginære.

3. Find det fuldstændige Integral af den lineære, ikke homogene Differentialligning

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = ae^x - b,$$

hvor a og b er Konstanter.

Løsninger.

1. Transformationen $x - \alpha = \beta \operatorname{tg} v$ fører Integralet over til

$$\frac{2}{\beta^{2n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos v)^{2n}\, dv = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{\pi}{\beta^{2n+1}}.$$

Man kunde naturligvis ogsaa straks have anvendt delvis Integration paa det forelagte Integral.

2. Resolventen $y^3 - 4y - 1 = 0$ har lutter reelle Rødder med Summen 0 og Produktet 1; to af disse Rødder maa derfor være negative, den tredje derimod positiv, og følgelig har den bikvadratiske Ligning alle sine Rødder imaginære.

3. Den tilsvarende homogene Differentialligning har de tre partikulære Integraler e^x, xe^x, x^2e^x. Søges i den ikke homogene Ligning et partikulært Integral af Formen

$$y = \alpha x^3 e^x + \beta,$$

hvor α og β er Konstanter, findes $\beta = b$, $6\alpha = a$, saaledes at det fuldstændige Integral bliver

$$y = b + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{a}{b} x^3) e^x,$$

hvor c_1, c_2, c_3 er arbitrære Konstanter.

Opgave i Matematik, Nr. 3.

1. Et Punkt gennemløber Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

med konstant Hastighed u. Angiv den største og den mindste Værdi for Punktets Akceleration.

2. Et Kraftfelt er i et retvinklet Koordinatsystem xyz bestemt saaledes, at den Kraft, der virker paa Masseenheden i Punktet (x, y, z) har Komposanterne

$$X = x, \quad Y = -2y, \quad Z = -1.$$

Digitized by Google

Et tyndt, retlinet fastliggende Rør er anbragt saaledes, at det følger Linien

$$y = x, \quad z = -2x + 7.$$

I dette Rør bevæger sig en Partikel med Masse 1, uden Gnidning, og under Paavirkning af det givne Kraftfelt. Partiklen udgaar fra det Punkt, hvor Røret skærer z-Aksen, med Hastigheden 0. Bestem Bevægelsen. Vis, at Partiklen udfører en svingende Bevægelse, og bestem Svingningstiden.

Undersøg, om Røret kunde have en saadan Stilling, at Partiklen i det givne Kraftfelt vilde fortsætte en engang paabegyndt Bevægelse med uforandret Hastighed.

Løsninger.

1. Akcelerationen er rettet efter Normalen og $= \frac{v^2}{\rho}$, hvor ρ er Krumningsradius. Den største og mindste Krumningsradius haves i Aksernes Endepunkter, henholdsvis $\frac{a^2}{b}$ og $\frac{b^2}{a}$. Altsaa er den mindste og største Akceleration henholdsvis $\frac{bv^2}{a^2}$ og $\frac{av^2}{b^2}$.

2. Levende Krafts Princip giver

$$d(\tfrac{1}{2}v^2) = x\,dx - 2y\,dy - dz,$$

altsaa

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \tfrac{1}{2}x^2 - y^2 - z + c$$

eller

$$v^2 = x^2 - 2y^2 - 2z + c.$$

Nu er

$$y = x, \qquad z = -2x + 7,$$

altsaa

$$v^2 = -x^2 + 4x - 14 + c.$$

$x = 0$ svarer til $v = 0$, altsaa $c = 14$, og

$$v^2 = -x^2 + 4x; \qquad v = 0 \text{ for } x = 4 \text{ (og } x = 0).$$

$$6\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4 - (x-2)^2,$$

$$t = \sqrt{6} \arccos \frac{2-x}{2}.$$

$x = 4$ giver $t = \pi\sqrt{6}$.

Naar Røret lægges langs en retlinet Frembringer paa Fladen $x^2 - 2y^2 + 2z = c$, bliver Hastigheden konstant.

II Del (ny Ordning), Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 1.

1. I et sædvanligt Trekantskoordinatsystem skal bestemmes en unikursal, algebraisk Kurve af 3. Orden, saaledes, at

Digitized by Google

Koordinattrekantens Sider bliver Vendetangenter til Kurven, med Røringspunkter beliggende paa Linien

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Find Kurvens Dobbeltpunkt, og bestem Dobbelpunktets Tangenter.

2. I en Plan π er givet 3 rette Linier a, b, c, der ikke gaar gennem samme Punkt, samt et Punkt P, der ikke ligger paa nogen af Linierne. Gennem P gaar 3 Linier a_1, b_1, c_1, hvoraf ingen ligger i π, og som ikke ligger i en og samme Plan. Af et vilkaarligt Punkt M i Rummet (uden for π) afleder man en tilsvarende Plan μ, bestemt ved de 3 Skæringspunkter A_1, B_1, C_1 mellem Planerne Ma, Mb, Mc og Linierne henholdsvis a_1, b_1, c_1. Vis, at den herved bestemte Forbindelse mellem M og μ er en Reciprocitet. Hvilke specielle Egenskaber vil der være at lægge Mærke til ved denne Reciprocitet?

Løsninger.

1. Kurvens Ligning har Formen

$$f(x) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^3 + kx_1x_2x_3 = 0.$$

Skal der være et Dobbeltpunkt, har man

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

hvoraf

$$x_1 = x_2 = x_3,$$

saaledes at det søgte Dobbeltpunkt er Enhedspunktet. Tangenterne findes ved Ligningen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}x_3\right)^2 f = 0,$$

altsaa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2 = 0.$$

De to Tangenter er æquianharmonisk forbundne med de 3 Linier, der gaar til Vendepunkterne.

2. Til Punktet M svarer en Plan $\mu = (A_1B_1C_1)$. Lader man M gennemløbe en ret Linie, vil Planerne Ma, Mb, Mc gennemløbe Planbundter, der to og to er perspektive. Punkterne A_1, B_1, C_1 vil beskrive Punktrækker, der ligeledes er perspektive. Planen $A_1B_1C_1$ vil altsaa frembringe et Planbundt. Til en Punktrække (M) svarer altsaa et Planbundt (μ), hvilket skulde bevises. Det, der særlig karakteriserer denne Reciprocitet, er det, at de Punkter, der ligger i deres tilsvarende Planer, samler sig paa en Kegleflade med Toppunktet P og indeholdende a_1, b_1, c_1, medens de Planer, der svarer dertil, rører et Keglesnit, der tangerer a, b, c.

Digitized by Google

II Del (ældre Ordning), Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 1.

1. Idet α er en vilkaarlig Parameter, medens p og q er positive hele Tal, og $p \geqq q$, skal man bestemme det hele Polynomium i x, der tilfredsstiller den homogene lineære Differentialligning af anden Orden

$$x(1-x)y'' + (-p + (q-\alpha-1)x)y' + q\alpha y = 0.$$

2. Samme Opgave som Opgave 1 i Sættet ovenfor.

Løsninger.

1. Indsættes som sædvanlig $y = \Sigma a_n x^{\rho+n}$, og søges Koefficienten til Potensen $x^{n+\rho}$, findes efter en simpel Reduktion

$$(n+\rho+1)(n+\rho-p)a_{n+1} = (n+\rho+\alpha)(n+\rho-q)a_n,$$

medens ρ bestemmes, idet man søger Koefficienten til $x^{\rho-1}$; denne Koefficient bliver

$$a_0\rho(\rho-p-1),$$

og altsaa haves

$$\rho = 0 \quad \text{og} \quad \rho = p+1.$$

Ovenstaaende Rekursionsformel viser umiddelbart, at $\rho = p+1$ fører til en uendelig Række, medens $\rho = 0$ giver det søgte Polynomium af Graden q

$$y = a_0\left(1 + \frac{\alpha}{p}\binom{q}{1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{p(p-1)}\binom{q}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q-1)}{p(p-1)\cdots(p-q+1)}\binom{q}{q}x^q\right).$$

For $p = q$ faas de $q+1$ første Led af Rækken for $(1-x)^{-\alpha}$, medens denne Potens bliver det andet Integral.

II Del (ældre Ordning og ny Ordning med ældre I Del), Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 2.

1. Find Værdien af det krumlinede Integral

$$\int_C \frac{(\log x)^2 dx}{x^2 + a^2},$$

hvor $\log x$ betegner Hovedværdien, medens a er en positiv Konstant, og C er sammensat af to Halvcirkler, der begge har Centrum i Begyndelsespunktet, Radierne R og r, og er helt

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN

beliggende over den reelle Akse, samt af de to mellemliggende Stykker af denne Akse. Hvilke retlinede Integraler udledes derved, naar man lader R vokse uden Grænse og samtidig r konvergere mod Nul?

2. Vis, at den ubestemte Ligning

$$x^2 - 4xy - y^2 = \pm 1$$

har uendelig mange positive hele Løsninger, og angiv et Middel til Bestemmelse af disse Løsninger.

3. Bestem Konvergensomraadet for den uendelige Række

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^2 + x^4 + x^6)^n,$$

og find dernæst det almindelige Udtryk for Koefficienterne i Potensrækken

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \cdots.$$

Løsninger.

1. Integralet har Værdien Nul, undtagen naar $r < a < R$, medens det ikke eksisterer for $r = a$ eller $R = a$.

Antages altsaa $r < a < R$, har Integranden, indenfor C, den simple Pol $x = ai$, hvis Residuum bliver

$$\lim_{x=ai} \left(\frac{(x - ai) \log^2 x}{(x - ai)(x + ai)} \right) = \frac{\log^2 (ai)}{2ai},$$

og Integralet har følgelig Værdien

$$I = \int_C \frac{(\log x)^2 \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \left(\log^2 a + i\pi \log a - \frac{\pi^2}{4} \right).$$

Betegnes de to Halvcirkler ved K og k, faas endvidere

$$I = \int_{-R}^{-r} + \int_k + \int_r^R + \int_K ;$$

sættes dernæst paa k og K henholdsvis $x = re^{iv}$, $x = Re^{iv}$, ser man straks, at de krumlinede Integraler har Grænseværdien Nul, naar r konvergerer mod Nul, medens R vokser uden Grænse, og altsaa findes

$$I = \int_0^\infty \frac{(\log x)^2 \, dx}{x^2 + a^2} + \int_0^\infty \frac{(\log (-x))^2 \, dx}{x^2 + a^2}.$$

Sættes dernæst $\log (-1) = \pi i$, faas de to retlinede Integraler

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\log^2 a + \frac{\pi^2}{4}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^3+a^2} = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

2. Omskrives Ligningen til

$$(x-2y)^2 - 5y^2 = \pm 1,$$

ser man, at Bestemmelsen af de hele Værdier for x og y er reduceret til at bestemme u og v af

$$u^2 - 5v^2 = \pm 1, \qquad (1)$$

og da denne Ligning har uendelig mange heltallige Løsninger, gælder det samme om den forelagte, idet man finder

$$x = u + 2v, \quad y = v. \qquad (2)$$

De heltallige Løsninger i (1) er Tællere og Nævnere i Konvergenterne svarende til den uendelige periodiske Kædebrøk

$$\sqrt{5} = [2,(4)],$$

altsaa

$$\frac{2}{1},\ \frac{9}{4},\ \frac{38}{17},\ \cdots.$$

Betegnes disse Tal ved u_n og v_n for $n = 1, 2, 3, \cdots$, faas følgelig

$$x_n = u_n + 2v_n, \quad y_n = v_n$$

som samtlige heltallige Løsninger af den forelagte Ligning.

3. Konvergensomraadet for den forelagte Række bestemmes som det indre af den lukkede Kurve

$$|x^2 + x^4 + x^6| = 1.$$

Da man umiddelbart finder

$$f(x) = \log(1 + x^2 + x^4 + x^6) = \log(1 + x^2) + \log(1 + x^4),$$

faas

$$a_0 = 0, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{4n+2} = \frac{1}{2n+1}, \quad a_{4n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{2n}.$$

II Del (ny Ordning med ny I Del), Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 2.

1. og 2. samme Opgaver som 1. og 2. i Sættet ovenfor.

3. Sættes for ethvert positivt helt n

$$D_x^n[x^\alpha e^x] = x^{\alpha-n}e^x f_n(x),$$

Digitized by Google

hvor α er en vilkaarlig Konstant, skal man finde Polynomiet $f_n(x)$ og bevise Formlerne

$$f_n'(x) = nf_{n-1}(x)$$
$$f_n(x) = (x + \alpha - n + 1)f_{n-1}(x) + (n - 1)xf_{n-2}(x).$$

Antages dernæst α reel, og $r - 1 < \alpha < r$, hvor r er positiv hel, skal man endelig vise, at den algebraiske Ligning

$$f_n(x) = 0$$

har r negative Rødder. Eks. $r = n - 1$.

Løsninger.

3. Man finder ved Leibnitz's Formel

$$f_n(x) = x^n + \sum_{s=1}^{s=n} \binom{n}{s} \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - s + 1) x^{n-s},$$

hvoraf den første Funktionalligning $f_n'(x) = nf_{n-1}(x)$ let udledes.

Differentieres Definitionsligningen med Hensyn til x, faas efter en simpel Reduktion

$$f_{n+1}(x) = (x + \alpha - n)f_n(x) + xf_n'(x),$$

hvilket straks giver den anden Funktionalligning.

Af disse Funktionalligninger følger umiddelbart, at Polynomierne

$$f_n(x), \quad f_{n-1}(x), \quad f_{n-2}(x), \cdots, \quad f_1(x), \quad f_0(x)$$

i ethvert Interval $[a, b]$, hvor $a < b < 0$, danner en Sturmsk Kæde. Da denne Kæde for negative numerisk tilstrækkelig store x danner lutter Variationer, for $x = 0$ derimod kun $n - r$, har Ligningen $f_n(x) = 0$ altsaa netop r negative Rødder.

Er specielt $r = n - 1$, har Ligningen altsaa $n - 1$ negative Rødder, og følgelig er den $n$te Rod ogsaa reel, men positiv.

For $r \geqq n$ har Ligningen alle sine Rødder negative.

II Del (gl. og ny Ordning), Juni 1921.

Opgave i Matematik, Nr. 3.

1. Paa en Flade er Linieelementet bestemt ved Formen

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2,$$

hvor G er en Funktion af u alene.

En vilkaarlig geodætisk Kurve paa Fladen skærer i ethvert af sine Punkter den gennem Punktet gaaende v-Kurve

Digitized by Google

(svarende til v = en Konstant) under en vis Vinkel φ. Vis, at Udtrykket

$$\sqrt{G}\cdot\sin\varphi$$

for alle Punkter af den samme geodætiske Kurve vil have en konstant Værdi.

2. I xz-Planen i et retvinklet Koordinatsystem xyz skal bestemmes en Kurve, der gaar gennem Punktet $A = (1, 0, 0)$, og som tilfredsstilier Ligningen

$$x^2 = 2u + 1,$$

hvor x er Abscissen til det løbende Punkt paa Kurven, medens u er Buelængden regnet fra A til dette Punkt. Den fundne Kurve drejes om z-Aksen og beskriver derved en Omdrejningsflade. Bestem de geodætiske Kurver paa denne Flade. Hvorledes kan Sætningen i den foregaaende Opgave anvendes til Undersøgelse af disse Kurver? Under hvilken Vinkel vil en geodætisk Kurve, der rører Parallelcirklen med Radius 1, skære Parallelcirklen med Radius 2, og hvor stor er den mellem de to Parallelcirkler liggende Bue af Kurven?

Løsninger:

1. Den ene af de kendte Formler til Bestemmelse af geodætiske Kurver giver straks

$$G\frac{dv}{ds} = \text{Konst.},$$

og da

$$\sin\varphi = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds},$$

er Sætningen hermed bevist.

2. Ligningen $x^2 = 2u + 1$ giver

$$2x\,dx = 2\,du,$$
$$x\,dx = \sqrt{dx^2 + dz^2},$$
$$dz = \sqrt{x^2 - 1}\,dx,$$
$$z = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \tfrac{1}{2}l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Omdrejningsfladens Bueelement bestemmes ved Formen:

$$ds^2 = du^2 + (2u + 1)\,dv^2.$$

De geodætiske Kurver ved Ligningen

$$(2u + 1)\frac{dv}{ds} = k, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{k}{2u + 1};$$

$$\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{k^2}{2u + 1}, \qquad \frac{du}{ds} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{2u + 1}};$$

heraf faas

Digitized by Google

Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien.

Af J. Nielsen.

Lad $a_1, a_2, \cdots, a_n$ være et System af n Ting, som vi vil kalde »Frembringere«. Med a_i skal ogsaa dens »Reciprok«, a_i^{-1}, antages at være givet. Ved »Element« skal forstaas et »Produkt« af disse n Frembringere og deres Reciproker, $\Pi(a_i^{+1})$, hvor det dog ikke skal være tilladt at ombytte »Faktorerne«; Elementet $a_1a_1^{-1}a_1^3a_1a_1^{-2}$ er saaledes forskelligt fra $a_1a_1^{-1}a_1^{-2}a_1a_1^3$. En Frembringer skal kunne bortforkortes mod sin Reciprok, naar de staar umiddelbart ved Siden af hinanden i et Produkt: $a_2^3a_2^2a_2^{-3} = a_2^3a_2^{-1}$. Bortforkortes paa denne Maade alle Faktorer i et Produkt, skrives det 1; f. Eks. $a_ia_i^{-1} = a_i^{-1}a_i = 1$. Er e et vilkaarligt Element, skal dets »Reciprok« e^{-1} defineres saaledes, at $ee^{-1} = e^{-1}e = 1$; Frembringerne i e^{-1} faas altsaa ved, at man læser dem bagfra i e og tager dem med modsat Exponentfortegn. Eksempel:

$$e = a_1a_5^{-2}a_3^3a_4^{-1}; \qquad e^{-1} = a_1a_5^{-3}a_3^2a_1^{-1}.$$

§ 1. Reduktion af et givet Elementsystem.

Lad nu $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ være m vilkaarlige Elementer. Vi kan antage, at de er skrevne i uforkortelig Form. Lad endvidere β være et hvilketsomhelst Element. Vi siger, at Systemet $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ »frembringer« Elementet β, hvis der findes et saadant Produkt $\Pi(\alpha_i^{+1})$, at det, eventuelt ved Forkortning, viser sig at være lig med β. Er saaledes givet $\alpha_1 = a_1a_2a_1^{-2}$, $\alpha_2 = a_2^{-1}a_1^{-2}$ og $\beta = a_1a_2^2a_1a_2^2$, ses β at være lig med $\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2^{-1}$. Et Elementsystem siges at frembringe et andet, naar det frembringer ethvert Element i dette. To Systemer, som frembringer hinanden gensidig, siges at være »ækvivalente«, eller at høre til samme »Klasse«.

Vi vil betegne Systemet $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ med S, Systemet $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \cdots, \alpha_m^{-1}$ med S^{-1} og Systemet $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_m^{-1}$ med $S + S^{-1}$. Med $g(\alpha_1)$ vil vi betegne Antallet af Frembringere i α_1, d. v. s. Summen af de numeriske Værdier af alle i α_1 forekommende Eksponenter. $g(\alpha_1) = g(\alpha_1^{-1})$. Endvidere betegnes $\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = g(S)$. Vi

Digitized by Google

vil nu søge at erstatte S med et System S', der er ækvivalent med S og for hvilket $g(S') < g(S)$. Indekstallene i S tænkes fordelt saaledes, at $g(\alpha_1) \leqq g(\alpha_2) \leqq \cdots \leqq g(\alpha_m)$; et Systems Frembringelsesevne er jo uafhængig af Ordenen indenfor Systemet. Nu søger vi at opnaa en Formindskelse af g-Tallene ved at multiplicere Elementerne to og to. Vi danner altsaa Elementerne $\alpha_i\alpha_k$, $\alpha_i^{-1}\alpha_k$, $\alpha_k\alpha_i$, $\alpha_k\alpha^{-1}$ for $i = 1, 2, \cdots m-1$ og $k > i$ og vil opnaa den ønskede Formindskelse, hvis mere end Halvdelen af α_i kan bortforkortes i et saadant Produkt. Er f. Eks. $g(\alpha_i\alpha_k) < g(\alpha_k)$, da definerer vi et nyt System S' ved: $\alpha'_\rho = \alpha_\rho$ for $\rho \neq k$ og $\alpha'_k = \alpha_i\alpha_k$. S frembringer altsaa S'. Men da $\alpha_\rho = \alpha'_\rho$ for $\rho \neq k$ og $\alpha_k = \alpha_i'^{-1}\alpha'_k$, frembringer S' ogsaa S; og $g(S') < g(S)$. Er $\alpha'_k = 1$, bortkastes det. De Kombinationer, man vilde faa ved at medtage Tilfældet $k = i$, er ubrugelige til en saadan ækvivalent Ændring af Systemet; man vilde iøvrigt altid have $g(\alpha_i^2) > g(\alpha_i)$ for $\alpha_i \neq 1$. Den samme Fremgangsmaade anvendes i de Tilfælde, hvor $\alpha_i^{-1}\alpha_k$ eller $\alpha_k\alpha_i$ eller $\alpha_k\alpha_i^{-1}$ opviser den ønskede Formindskelse. Elementerne i S' ordnes nu paany efter g-Tal; derefter erstattes S' paa samme Maade med et ækvivalent System S'', hvor $g(S'') < g(S')$, o. s. fr. Den derved fundne Række af Systemer er endelig, da g-Tallet jo stadig aftager. Lad $S^{(p)}$ være det sidste i Rækken, saa $g(S^{(p)})$ ikke kan formindskes yderligere ved den nævnte Fremgangsmaade. Der findes altsaa ikke 2 Elementer med forskellig Indeks i $S^{(p)} + S^{(p)-1}$ saaledes, at mere end Halvdelen af det ene kan bortforkortes i et af deres to Produkter. Vi forsøger da at danne saadanne Produkter af 3 Elementer, at det midterste bortforkortes helt mellem de to andre; dette er kun muligt ved, at det midterste Element har lige g-Tal og at en Halvdel bortforkortes til hver Side. Lad α_{h_1} være det første Element i Systemet, der har denne Egenskab, at kunne bortforkortes helt mellem to andre, og lad E_1 og E_2 være dets to »Halvender«, saaledes at $\alpha_{h_1} = E_1E_2$ og $g(E_1) = g(E_2) = \frac{1}{2}g(\alpha_{h_1})$. Vi vil da bevirke, at α_{h_1} taber denne Egenskab, ved at foretage saadanne ækvivalente Ændringer af Systemet, at E_2 erstattes med E_1^{-1} overalt, hvor E_2 optræder som »Ende« i Systemet, undtagen i α_{h_1} selv. Er altsaa $\alpha_k = E_kE_2$, $(k \neq h_1)$, erstatter vi det med $\alpha'_k = \alpha_k\alpha_{h_1}^{-1} = E_kE_1^{-1}$; og er $\alpha_l = E_2^{-1}E_l$, erstatter vi det med $\alpha'_l = \alpha_{h_1}\alpha_l = E_1E_l$. Det er klart, at kun saadanne Elementer α_k, α_l, $\cdots$ kan komme i Betragtning ved disse ækvi-

Digitized by Google

valente Ændringer, hvis g-Tal er $\geqq g(\alpha_{h_1})$, da jo ellers mere end Halvdelen af dem vilde bortforkortes i disse Produkter. Da deres g-Tal ikke ændres ved disse ækvivalente Ændringer, kan vi beholde den gamle Orden i Systemet. Intet af Systemets Elementer begynder nu med E_2^{-1}, og intet uden α_{h_1} ender med E_2; vi vil derfor kalde E_2 en »isoleret Ende« i Systemet. Intet af de Elementer, der eventuelt gaar forud for α_{h_1} i Systemordenen, kan ved disse ækvivalente Ændringer, som vi for Øjeblikket kan kalde α_{h_1}-Ændringerne, have erhvervet den Egenskab, at kunne bortforkortes mellem to andre af Systemets Elementer med en Halvdel til hver Side; thi enten det selv har været underkastet en α_{h_1}-Ændring eller ej, vil dets Halvender have et g-Tal $\leqq g(E_1)$; de Elementender, der i det Hele taget ved α_{h_1}-Ændringerne har faaet en ny Skikkelse, begynder med E_1 eller ender med E_1^{-1}; men Enden E_1 forefandtes allerede før α_{h_1}-Ændringerne i Systemet, f. Eks. i α_{h_1}; og har vedkommende Element selv været underkastet en α_{h_1}-Ændring, da har det før denne haft en Halvende E_2; men ogsaa denne forefandtes før α_{h_1}-Ændringerne andetsteds i Systemet, f. Eks. i α_{h_1}. — Muligvis har disse α_{h_1}-Ændringer ført til, at der i det nye System findes et Element (eller flere), af hvilket mere end Halvdelen kan bortforkortes i Produktet med et andet Element. Da vil vi atter anvende den første Fremgangsmaade, ved hvilken vi opnaar en Formindskelse af Systemets g-Tal. Hvis dette ikke er Tilfældet, bestemmer vi det næste Element α_{h_2} i Rækken, $(h_2 > h_1)$, der har den Egenskab, at kunne bortforkortes mellem to andre — hvis et saadant overhovedet findes —, og foretager ved Hjælp af dette de α_{h_2}-Ændringer i Systemet, der svarer til de før beskrevne α_{h_1}-Ændringer. Derefter undersøges paany, om den første Fremgangsmaade kan finde Anvendelse o. s. fr. Ved at fortsætte med at skifte mellem de to Fremgangsmaader, saaledes at man stadig foretrækker den første, hvor der er Mulighed for den, føres man til en Række ækvivalente Ændringer af Systemet S, der indeholder Ændringer af første Art, ved hvilke Systemets g-Tal formindskes, og som derfor kun kan være i endeligt Antal, og Ændringer af anden Art, ved hvilke Systemets g-Tal ikke forandres; en Følge af disse sidste, som altsaa staar imellem 2 Ændringer af første Art eller Rækkens Ender, bestaar af et begrænset Antal af α_{h_1}-Ændringer, dernæst et begrænset Antal af α_{h_2}-Ændringer, med $h_2 > h_1$, o. s. v.

Digitized by Google

med stedse voksende Indekstal h_i; Følgen er altsaa ligeledes endelig. Til Slut maa man altsaa naa til et System S^*, der hverken giver Plads for den ene eller den anden Fremgangsmaade mere. S^* skal kaldes et »reduceret System til S«. S^* er ækvivalent med S. Dets Elementtal er mindre eller lig med Elementtallet i S. Endvidere er $g(S^*) \leqq g(S)$. Dets karakteristiske Egenskab er: I intetsomhelst Produkt af 2 Elementer kan mere end Halvdelen af det ene bortforkortes; i intetsomhelst Produkt af 3 Elementer kan det midterste bortforkortes helt mellem de to andre. (Herved ses naturligvis bort fra det Tilfælde, at et Element staar sammen med sin Reciprok). Eller udførligere: Et Produkt E i Frembringerne kaldes en »isoleret venstre (henholdsvis højre) Ende« i et System S, naar eet og kun eet af Elementerne i $S + S^{-1}$ begynder med E (henholdsvis ender med E). For et reduceret System gælder da: Enhver Elementende, der omfatter mere end Halvdelen af Elementets Frembringere, er isoleret; af de to Halvender i et Element med lige g-Tal er mindst een isoleret.

Eksempel.

Lad det givne System S være

$$\alpha_1 = a_4 a_2 a_1^{-1} a_3; \quad \alpha_2 = a_1^2 a_3^{-2} a_4^{-1}; \quad \alpha_3 = (a_2^{-1} a_1^{-1} a_3)^2;$$
$$\alpha_4 = a_1 a_2^2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_3.$$

Vi vil underkaste dette System Reduktionsprocessen og betegne den gennemløbne Systemrække med $S^{(1)}, S^{(2)}, \cdots$, idet vi dog kun nedskriver det Element, der forandres ved den paagældende ækvivalente Ændring, og tænker os de andre nedskrevne uforandrede, samt i dette simple Eksempel undlader at ordne Elementerne efter g-Tal hver Gang.

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2 \alpha_4 = a_1 a_2^{-1} a_1^{-1} a_3$$
$$\alpha_3^{(2)} = \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(1)-1} = a_2^{-1} a_1^{-1} a_3 a_1^{-1}.$$

Vi har derved to Gange opnaaet Formindskelse af Systemets g-Tal, men dette er nu ikke mere muligt foreløbig. De nu foreliggende 4 Elementer: $\alpha_1^{(2)} = \alpha_1$, $\alpha_2^{(2)} = \alpha_2$, $\alpha_3^{(2)}$ og $\alpha_4^{(2)} = \alpha_4^{(1)}$ tillader ikke mere, at danne et Produkt af to Faktorer, der har mindre g-Tal, end en af Faktorerne. Vi vil derfor se os om efter et Element, som kan bortforkortes helt mellem to andre. Denne Mulighed foreligger her paa een Maade, idet

Digitized by Google

$\alpha_1^{(2)}$ bortforkortes helt i $\alpha_3^{(2)}\alpha_1^{(2)}\alpha_4^{2)-1}$. Vi vil altsaa sørge for, at f. Eks. den højre Halvende af $\alpha_1^{(2)}$ bliver en isoleret Ende i Systemet. Dertil kræves der her kun een ækvivalent Ændring, nemlig:

$$\alpha_4^{(3)} = \alpha_1^{(2)}\alpha_1^{(2)-1} = a_1 a_2\ {}^2a_4^{-1}.$$

Nu kan vi igen fortsætte efter den første Fremgangsmaade med Formindskelse af g-Tallet:

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(4)} &= \alpha_2^{3)}\alpha_4^{(3)-1} = a_1,\\
\alpha_4^{(5)} &= \alpha_2^{(4)-1}\alpha_4^{(4} = a_2^{-2}a_1^{-1}.\\
\alpha_3^{(6)} &= \alpha_3^{5)}\alpha_2^{(5)} = a_2^{-1}a_1^{-1}a_3,\\
\alpha_1^{(7)} &= \alpha_1^{(6)}\alpha_3^{(6)-1} = a_4 a_2^{2},\\
\alpha_4^{(8)} &= \alpha_4^{7)}\alpha_1^{(7)} = 1 \text{ og bortkastes altsaa.}
\end{aligned}$$

De tre Elementer $\alpha_1^{(8)}$, $\alpha_2^{(8)}$ og $\alpha_3^{(8)}$, der bliver tilbage, tillader nu ingen Ændringer mere, hverken efter den første eller anden Fremgangsmaade, danner altsaa et reduceret System S^* til S. Idet vi ordner Elementerne efter g-Tal og giver dem nye Navne, har vi:

$$\alpha_1^* = a_1\,(=\alpha_2^{(8)});\quad \alpha_2^* = a_2^{-1}a_1^{-1}a_3\,(=\alpha_3^{(8)});\quad \alpha_3^* = a_1 a_2^{\,2}\,(=\alpha_1^{(8)}).$$

Vi vil nedskrive de Ligninger, der viser Systemernes Ækvivalens. Som S^*'s Frembringelse ved S faas ved at følge Reduktionsprocessens Forløb:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1^* = \alpha_2\alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1};\quad \alpha_2^* = \alpha_3\alpha_4^{-1}\alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1};\\
\alpha_3^* = \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_4\alpha_3^{-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Denne Frembringelse er imidlertidig ikke entydig; f. Eks. kunde man erstatte den anden Ligning med $\alpha_2^* = \alpha_2\alpha_1\alpha_1^{-1}\alpha_4$. Som S's Frembringelse ved S^* faas (f. Eks. ved at gennemløbe Reduktionsprocessen den modsatte Vej):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_3^*\alpha_2^*;\quad \alpha_2 = \alpha_1^{*2}\alpha_3^{*-1};\quad \alpha_3 = \alpha_2^{*2};\\
\alpha_4 = \alpha_3^*\alpha_1^{*-1}\alpha_2^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Denne Frembringelse er entydig, som det skal vises i § 2. At Ligningerne (1) er et Opløsningssystem til (2) med Hensyn til α^*-erne fremgaar rent formelt, d. v. s. uden at man tager Hensyn til α-ernes Betydning som Produkter i de oprindelige Frembringere a_i. Medens (2) kun indses at være et Opløsningssystem til (1), naar man indsætter α-ernes Udtryk i a-erne.

Digitized by Google

§ 2. Uafhængigt Elementsystem.

Lad $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ være r givne Elementer i Frembringerne $a_1, a_2, \cdots, a_n$, $\Gamma = \Pi(\gamma_l^{\pm 1})$ et vilkaarligt Produkt af disse. Viser Γ sig ved Forkortning i Frembringerne a_l at være lig med 1, siges $\Gamma = 1$ at være en »i Frembringerne a_l identisk Relation mellem $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$«. Denne siges at være »triviel« eller »uvæsentlig«, naar den ogsaa er »identisk i Elementerne γ_l«, d. v. s. naar et γ_x staar umiddelbart sammen med γ_x^{-1}, altsaa kan bortforkortes som Helhed, og dette kan fortsættes indtil man har bortforkortet alle γ-erne i Γ. Eksisterer der ingen væsentlig Relation mellem $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$, siges de at være »indbyrdes uafhængige« eller at danne et »uafhængigt System«. Frembringerne $a_1, a_2, \cdots, a_n$ selv danner et Eksempel paa et saadant, idet de jo antages at være indbyrdes forskellige. Som Eksempel paa et afhængigt Elementsystem kan vi benytte de i § 1 forelagte Elementer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, idet vi let kan opstille væsentlige Relationer mellem disse, f. Eks. $(\alpha_3\alpha_4\alpha_1^{-1}\alpha_4)^3\alpha_3^{-1} = 1$. Erstatter vi heri S med S^* ved Hjælp af (2), bliver Relationen triviel, nemlig identisk i α^*-erne. Vi vil nu vise, at altid gælder:

Sætning 1: Et reduceret System er uafhængigt.

Bevis: Lad $\gamma_1, \cdots, \gamma_r$ være et reduceret System og $\Gamma = \Pi(\gamma_l^{\pm 1}) = 1$. Hvis alle Faktorer γ_l i Γ ved Forkortning mellem den forudgaaende og den efterfølgende Faktor gav en Rest, vilde Γ bestaa af alle disse Rester, mellem hvilke der ingen yderligere Forkortning kunde finde Sted i Modstrid med $\Gamma = 1$. Altsaa maa mindst een af Faktorerne bortforkortes helt mellem sine to Naboer. Men ifølge et reduceret Systems Egenskab kan det kun ske ved, at en af Naboerne er dens Reciprok. Deres Produkt kan altsaa bortkastes, og ved at fortsætte paa samme Maade ser man, at $\Gamma = 1$ er en triviel Relation. — En Relation mellem et reduceret Systems Elementer, der er en Identitet i Frembringerne, er altsaa ogsaa en Identitet i Systemets Elementer.

Vi vil nu bevise følgende Hjælpesætning:

Hvis $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ er indbyrdes uafhængige (afhængige), da er ogsaa $\gamma_1\gamma_2, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ indbyrdes uafhængige (afhængige).

Lad $S = \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ være et uafhængigt System. Vi sætter $S' = \gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_r'$, hvor $\gamma_1' = \gamma_1\gamma_2$, og $\gamma_j' = \gamma_j$ for

Digitized by Google

$j = 2, 3, \cdots, r$. Lad $\Gamma = \Pi(\gamma_i'^{\pm 1}) = 1$ være en gyldig Relation for S'. For at fremhæve γ_1' vil vi skrive den udførligt i følgende Form: $\Gamma = P_1\gamma_1'^{\varepsilon_1}P_2\gamma_1'^{\varepsilon_2}\cdots P_\rho\gamma_1'^{\varepsilon_\rho}P_{\rho+1}$, hvor alle $\varepsilon_i = \pm 1$ og alle P_i er Produkter af $\gamma_2', \cdots, \gamma_r'$ eller 1. Indfører vi S istedetfor S', faar vi:

$$\Gamma = P_1(\gamma_1\gamma_2)^{\varepsilon_1}P_2(\gamma_1\gamma_2)^{\varepsilon_2}\cdots P_\rho(\gamma_1\gamma_2)^{\varepsilon_\rho}P_{\rho+1},$$

hvor hvert P_i kun indeholder $\gamma_2, \cdots, \gamma_r$. Da $\Gamma = 1$ jo er en Identitet i γ-erne, skal de i Γ forekommende ρ Faktorer γ_1 bortforkortes indbyrdes; der vil altsaa paa mindst eet Sted i Γ findes to Faktorer γ_1 med modsat Eksponent, der skilles ved et Produkt i $\gamma_2, \cdots, \gamma_r$, som bortforkortes identisk i $\gamma_2, \cdots, \gamma_r$. Antager vi, at den første af disse Faktorer γ_1 f. Eks. har Eksponenten $\varepsilon_{\lambda-1} = +1$, faar vi:

$$\Gamma = \cdots\gamma_1\gamma_2P_\lambda\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\cdots$$

hvor $\gamma_2P_\lambda\gamma_2^{-1} = 1$ identisk i γ-erne, altsaa $P_\lambda = 1$ identisk i γ-erne, altsaa identisk i $\gamma_2', \gamma_3', \cdots, \gamma_r'$. Men da kan jo $\gamma_1'^{\varepsilon_{\lambda-1}}P_\lambda\gamma_1'^{\varepsilon_\lambda}$ bortforkortes identisk i γ'-erne. Og ved at fortsætte med samme Argumentation ser man, at $\Gamma = 1$ er en triviel Relation i γ'-erne Disse er altsaa uafhængige. Den omvendte Sætning følger umiddelbart af Sætningen selv ved indirekte Bevis, idet man frembringer S ved S' ved at sætte $\gamma_1 = (\gamma_1\gamma_2)\cdot\gamma_2^{-1}$. — Er S afhængigt og $\gamma_1\gamma_2 = 1$ og bortkastes det, kan $\gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_r$ selvfølgelig være uafhængige. — Det er klart, at et System, der fremgaar af et afhængigt System ved Tilføjelse af et vilkaarligt Element, ogsaa vil være afhængigt.

Da et Systems Egenskab at være uafhængigt (afhængigt) ikke forstyrres ved, at man permuterer dets Elementer og skifter Fortegn i et vilkaarligt Antal, ses det umiddelbart, at hvis $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$ er indbyrdes uafhængige (afhængige), da vil ogsaa det System være uafhængigt (afhængigt), der fremkommer ved, at man erstatter γ_i med $(\gamma_i^{\pm 1}\gamma_k^{\pm 1})^{\pm 1}$ og lader alle andre Elementer uforandrede. Man vil altsaa, ved stadig at foretage den Slags ækvivalente Ændringer i et uafhængigt (afhængigt) System, faa en hel Række uafhængige (afhængige) Systemer, som er indbyrdes ækvivalente Specielt ses:

Sætning 2: Et Elementsystem, der har samme Elementantal, som et deraf afledet reduceret System, er uafhængigt.

Digitized by Google

Thi ved Reduktionsprocessen forekommer i dette Tilfælde kun de nysnævnte ækvivalente Ændringer; og det reducerede System er uafhængigt.

Sætning 3: Et Elementsystem, der har større Elementantal end et deraf afledet reduceret System, er afhængigt.

Thi i Reduktionsprocessens Løb skal mindst een Gang et Element kastes bort. Det forudgaaende System maa da være afhængigt; og alle Systemer, som gaar forud for dette, altsaa ogsaa det givne, maa da ligeledes være afhængige.

§ 3. Frembringelsesproblemet.

Lad der være givet et System S af m Elementer $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$, α_m og et Element $\beta \neq 1$. Vi vil søge en Metode til at afgøre, om S frembringer β eller ej. Ved Hjælp af den i § 1 angivne Metode konstruerer vi til S et reduceret System $S^* = \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_p^*$, hvor jo $p \leqq m$. Da S^* er ækvivalent med S, har vi kun at afgøre, om S^* frembringer β. Dette er jo Tilfældet, hvis der eksisterer en Produktfremstilling $\beta = \Pi_1 (\alpha_i^{*+1})$; eksisterer samtidig Produktfremstillingen $\beta = \Pi_2 (\alpha_i^{*+1})$, saa er $\Pi_1 \Pi_2^{-1} = 1$ en Indentitet i Frembringerne a. Den vil da ifølge Sætning 1 ogsaa være en Identitet i Elementerne α^*, og begge Fremstillingerne vil altsaa være identiske, — idet vi kan antage dem skrevne uforkortelige i α^*-erne. Eksisterer der altsaa en Frembringelse af β ved S^*, saa er den ogsaa entydig. Faktorerne i dette Produkt efterlader ved Forkortelsen alle en Rest, og β er Samlingen af disse Rester. Lad α være den første Faktor; Resten, den efterlader i β, er mere end Halvdelen af α, eller nøjagtig Halvdelen og da en isoleret Halvdel. For at bestemme den første Faktor paa en hurtig og sikker Maade, kan vi opskrive hvad vi kan kalde S^*'s »venstre Storende-Samling«, idet vi med et Elements »venstre Storende« mener de første $r+1$ Frembringere i Elementet, naar dets g-Tal er $2r$ eller $2r+1$; den omtalte Samling skal da omfatte de $2p$ venstre Storender i $S^* + S^{*-1}$. Endvidere vil vi opskrive S^*'s »venstre Halvende-Samling«, i hvilken vi optager enhver saadan venstre Halvende af et Element med lige g-Tal i $S^* + S^{*-1}$, hvis komplementære Halvende ikke er isoleret, altsaa forekommer mindst paa to Steder i S^*. Hvis vi nu antager, at β frem-

Digitized by Google

bringes ved S^*, da skal et af to Tilfælde indtræde: Enten vil β begynde med een (og kun een) Storende af den første Samling, f. Eks. med venstre Storende i $\alpha_k^{*\varepsilon}$. Da vil Opgaven at frembringe β være ført tilbage til den Opgave at frembringe $\beta = \alpha_k^{*-\varepsilon}\beta$, hvor $g(\beta) < g(\beta)$. Eller β vil ikke begynde med en saadan Storende, men derimod med en saadan venstre Halvende, som forefindes i den anden Samling, f. Eks. med venstre Halvende i $\alpha_l^{*\eta}$. Opgaven vil da være ført tilbage til den Opgave at frembringe $\beta = \alpha_l^{*-\eta}\beta$. Dette vil ogsaa være en Reduktion af Problemet. Thi rigtignok er $g(\beta) = g(\beta)$, men β vil, hvis det ikke begynder med en Storende af første Samling, kun kunne begynde med saadan Halvende af anden Samling, hvis g-Tal er $> \frac{1}{2} g(\alpha_l^*)$. Ved at fortsætte med saadanne Reduktioner kan man altsaa muligvis nok faa en Række Elementer β, $\beta, \cdots$, der alle har samme g-Tal som β, men dog kun en endelig Række, nemlig i hvert Fald ikke flere, end der findes Halvender i anden Samling. Det er derfor klart, at Frembringelsesproblemet ved Konstruktionen af de to ovennævnte Samlinger kan løses i et endeligt Antal Skridt. Man faar en endelig Række Elementer $\beta, \beta, \beta, \cdots, \overset{(q)}{\beta}$, saaledes at hvert Element i Rækken paa entydig Maade bestemmes ved det forudgaaende og de to Samlinger. β frembringes ved S^*, naar $\overset{(q)}{\beta} = 1$ og kun i dette Tilfælde. Med andre Ord: Vi kommer enten i denne Proces engang til et Element $\overset{(q)}{\beta}$, der ikke mere begynder med en Frembringerfølge, der findes i en af de to Samlinger, og da frembringer S^* ikke β, eller vi faar β opløst i sine Faktorer i S^*. — Fra Frembringelsen af β ved S^* kan vi bagefter naturligvis uden Vanskelighed finde dets Frembringelse ved S. Vi kan sige, at β's Frembringelse ved S, hvis den er mulig, bliver evident, ved at vi erstatter S med S^*.

Eksempel.

Lad S være det i § 1 benyttede System $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Af det der konstruerede reducerede System S^* finder vi følgende venstre Storendesamling:

$$a_1,\ a_2^{-1}a_1^{-1},\ a_1a_2,\ a_1^{-1},\ a_3^{-1}a_1,\ a_2^{-2}$$

og ingen Halvendesamling. Lad β være

$$a_1a_1a_2a_1^{-1}a_3a_1^{-1}a_3^{-1}a_1a_2^{-1}a_4^{-1}.$$

Digitized by Google

Eksemplet er valgt saaledes, at S frembringer β. Selv om man vidste dette paa Forhaand, vilde det endogsaa i dette simple og paa ingen Maade kunstigt valgte Tilfælde være overordentlig møjsommeligt at prøve sig frem til en Fremstilling af β ved S. Men ved Hjælp af Storendesamlingen aflæser man Fremstillingen ved S^* umiddelbart. β begynder med a_1, $\beta = \alpha_1^{*-1}\beta$ begynder med a_1a_2, som er Storende i α_3^*. $\beta = \alpha_3^{*-1}\beta = a_2^{-1}a_1^{-1}a_3a_1^{-1}a_3^{-1}a_1a_2^{-1}a_4^{-1}$ begynder med $a_2^{-1}a_1^{-1}$ o. s. f. Man finder saaledes at

$$\beta = \alpha_1^*\alpha_3^*\alpha_2^*\alpha_1^{*-1}, \alpha_2^{*-1}\alpha_3^{*-1},$$

og kan dernæst ved Hjælp af Ligningerne (1) nedskrive β's Fremstilling i S, eller rettere sagt: en af β's Fremstillinger i S, da Ligningerne (1) jo ikke er entydig bestemte.

§ 4. Anvendelse i Gruppeteorien. Isomorfi.

Samlingen af alle ved $a_1, a_2, \cdots, a_n$ frembragte Elementer ses at have følgende Egenskaber: 1) To hvilkesomhelst givne Elementer e_1 og e_2 bestemmer »ved Komposition« (Multiplikation) et nyt Element af Samlingen: e_1e_2, og denne Multiplikation er associativ, d. v. s. $(e_1e_2)\cdot e_3 = e_1\cdot(e_2\cdot e_3)$; (Kompositionsregel og Associativitet). 2) Der eksisterer eet Element i Samlingen, som ved Komposition med et hvilketsomhelst Element ikke forandrer dette (Enhedselement, 1). 3) Til hvert Element e eksisterer der eet Element — vi betegner det med e^{-1} — som tilfredsstiller Ligningerne $ee^{-1} = e^{-1}e = 1$ (Reciprok). — En Samling af Ting, som opfylder disse 3 Betingelser, siges som bekendt at danne en Gruppe. I vort Tilfælde vil vi betegne denne med den ved Frembringerne $a_1, \cdots, a_n$ frembragte »frie Gruppe G_n« og skrive den $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$. Samlingen af de Elementer, der frembringes ved et Elementsystem $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, opfylder ligeledes de nævnte 3 Betingelser. Den Gruppe $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$, de danner, er en Undergruppe af G_n, da alle dens Elementer jo er Elementer af G_n. — (Det skal dog paa Forhaand siges, at man ikke kan vente at faa alle Undergrupper af G_n ad denne Vej, da en Samling af Elementer af G_n, der opfylder Gruppebetingelserne, ikke altid kan frembringes ved et endeligt Elementsystem[1]). — Med Hensyn til Gruppen $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$

[1]) Smlg. M. Dehn: Über unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Anm. 71 S. 118.

Digitized by Google

bruger vi ogsaa Betegnelsen »Frembringere« for $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$. Dette Frembringersystem er ingenlunde bestemt ved Gruppen; vi kan altid erstatte det med et ækvivalent System. Alle Systemer af samme Klasse bestemmer altsaa den samme Undergruppe af Elementer i G_n.

Her skal lægges Mærke til en Forskel i Gruppeelementernes Identificering i de forskellige Tilfælde. I G_n betegner to i a-erne uforkortelige, fra hinanden forskellige Produkter i a-erne altid to forskellige Elementer. Det er derfor, G_n skal kaldes en fri Gruppe. I $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$ kan to i α-erne uforkortelige, fra hinanden forskellige Produkter i α-erne bestemme det samme Element, nemlig naar de viser sig at være identiske, saa snart man for α-erne skriver disses Udtryk i a-erne. Dog kan man jo altid erstatte $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ med et reduceret System $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_p^*$, og to forskellige Produkter i disse vil da altid fremstille forskellige Gruppeelementer, da α^*-erne jo ifølge Sætning 1 er uafhængige. Gruppen $[\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ fremstilles altsaa i Formen $[\alpha_1^*, \cdots, \alpha_p^*]$ som fri Gruppe, og saaledes kan altsaa alle ved et endeligt Elementsystem bestemte Undergrupper af G_n fremstilles.

Det vil nu være af særlig Betydning at vide, om Gruppen $[\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ omfatter alle G_n's Elementer, altsaa falder sammen med G_n. I dette Tilfælde kalder vi $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ et »Primitivsystem«. Nødvendig og tilstrækkelig Betingelse derfor vil være, at S frembringer $a_1, a_2, \cdots, a_n$; men dette er det samme som, at et reduceret System $S^* = \alpha_1^*, \cdots, \alpha_p^*$ til S frembringer $a_1, \cdots, a_n$, og dette vil ifølge Frembringelsesproblemets Løsning kun ske, naar hvert a_i forefindes blandt α^*-erne enten med Eksponent $+1$ eller -1. S^* kan saa ikke indeholde flere Elementer, da det ellers ikke vilde være uafhængigt. Betingelsen er altsaa, at S^* er en Permutation af de med Eksponenter $+1$ eller -1 forsynede oprindelige Frembringere $a_1, \cdots, a_n$. Vi vil altsaa have: $p = n$ og $m \geqq n$.

Lad os betragte det Tilfælde, at $m = n$, at der altsaa ikke bortkastes noget Element af S ved Reduktionsprocessen. I dette Tilfælde er Systemet S ifølge Sætning 2 uafhængigt. Man kan altsaa udtrykke Forholdet mellem S og det oprindelige Frembringersystem $A = a_1, \cdots, a_n$ saaledes: 1) S frembringer A, og A frembringer S. 2) A og S har lige mange Elementer. 3) Parrer man paa enentydig Maade Elementerne i S med dem i A, da vil enhver gyldig Relation i A frem-

Digitized by Google

kalde en gyldig Relation i S ved, at man erstatter ethvert a med det tilsvarende α; og omvendt. (Simpelthen fordi Relationerne jo i begge Tilfælde skal være Identiteter). En saadan Sammenordning af de oprindelige Frembringere med de n Elementer $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ i bestemt Rækkefølge kalder man en »isomorf Transformation« eller »Autoisomorfi« for Gruppen G_n. Gruppen »afbildes« paa sig selv. For at et Elementsystem skal bestemme en saadan Autoisomorfi for G_n, skal det altsaa være et uafhængigt Primitivsystem, altsaa have n Elementer og frembringe A. — Man kan uden større Vanskeligheder gøre Rede for saadanne uafhængige Primitivsystemers Egenskaber, der frembyder en særlig Interesse i den frie Gruppe G_2 med kun 2 Frembringere [1]). Vil man efterspore Gruppens dybere liggende Egenskaber, da maa man berøve Systemet A dets Særstilling, da det jo paa ingen Maade udmærker sig overfor andre uafhængige Primitivsystemer. Det, der interesserer ved en Gruppe, er dens »indre« Egenskaber, der ikke er afhængige af Gruppens tilfældige Fremstilling, men invariante overfor isomorf Transformation.

Her skal endnu kun nævnes een Egenskab af saadan et uafhængigt Primitivsystem $S = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$. I α_i vil Frembringeren a_k i Almindelighed forekomme flere Gange og med baade positive og negative Eksponenter. Vi vil betegne den algebraiske Sum af a_k's Eksponenter i α_i med d_{ik} og danne et kvadratisk Talskema (en »Matriks«) af disse n^2 Tal d_{ik}. Denne Matriks ses for Systemet A selv at være »Enhedsmatriks«:

$$\begin{matrix} 1\,0\cdots\cdots 0 \\ 0\,1\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\,0\cdots\cdots 1 \end{matrix}$$

Dens Determinant er altsaa i dette Tilfælde $d_{ik} = +1$. Vi kan nu gaa over fra A til S ved en Række af følgende Operationer: 1) Skifte Fortegn i et enkelt Element; det betyder i Matriks: Skifte Fortegn i en af Matriks' Rækker. 2) Permutere Elementerne: permutere Matriks' Rækker. 3) Erstatte

[1]) Smlg. J. Nielsen: »Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit 2 Erzeugenden«, Math. Ann. 78. og »über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation«, Math. Ann. 79.

Digitized by Google

α_i med $\alpha_i \alpha_k^{+1}$: Addere k-te Række i Matriks med Faktor ± 1 til i-te Række. — Matriks kan derved antage en indviklet Skikkelse, men dens Determinant vil stadig være ± 1. Nødvendig Betingelse for en isomorf Transformation er altsaa, at Transformationsdeterminanten d_{ik} er lig ± 1; men denne Betingelse er selvfølgelig ikke tilstrækkelig.

Man ser jo her Forbindelsen med de sædvanlige lineære Ligninger. Vi gik ud fra Systemet af n Ligninger:

$$\alpha_i = \Pi^{(i)}(a_j^{+1}) \tag{3}$$

og definerede det før nævnte Talskema d_{ik}.

Lad os samtidig nedskrive de n Ligninger, der fremstiller a-erne som Produkt af α-erne:

$$a_i = \psi^{(i)}(\alpha_k^{+1}) \tag{4}$$

og betegne den algebraiske Sum af α_k's Eksponenter i a_i med δ_{ik}. Indsætter vi (3) i (4), faar vi de n Ligninger

$$a_i = \psi^{(i)}\left(\Pi^{(k)}(a_j^{+1})^{+1}\right),$$

der jo skal være Identiteter i a-erne, da disse er uafhængige. En bestemt Frembringer skal altsaa i en bestemt af disse Ligninger (5) have samme Eksponentsum paa begge Sider af Lighedstegnet. Derved faar vi de n^2 Ligninger:

$$\delta_{i1} d_{1l} + \delta_{i2} d_{2l} + \cdots + \delta_{in} d_{nl} = \begin{cases} 0 \text{ for } i \neq l \\ 1 \text{ for } i = l \end{cases} \tag{6}$$

Og disse Ligninger (6) er jo Udtryk for, at n lineære, ikke homogene Ligninger i n Ubestemte med de hele Tal d_{ik} som Koefficienter har et Løsningssystem med de hele Tal δ_{ik} som Koefficienter; men da skal man jo have $d_{ik} = \pm 1$. — Denne Sammenhæng kan fremstilles endnu mere haandgribelig, naar man husker paa, at a-erne jo kan betyde hvilketsomhelst, og man saa vælger dem som saadanne Ting, hvis Komposition er kommutativ. Lad os f. Eks. vælge a-erne som positive Tal. Vi faar saa ved at ombytte Faktorerne:

$$\alpha_i = a_1^{d_{i1}} a_2^{d_{i2}} \cdots a_n^{d_{in}} \tag{7}$$

$$a_i = \alpha_1^{\delta_{i1}} \alpha_2^{\delta_{i2}} \cdots \alpha_n^{\delta_{in}} \tag{8}$$

og ved at tage Logaritmerne og betegne disse med de tilsvarende store Bogstaver:

Digitized by Google

$$A_i = d_{i1} A_1 + d_{i2} A_2 + \cdots + d_{in} A_n \qquad (7\text{ a})$$
$$A_i = \delta_{i1} A_1 + \delta_{i2} A_2 + \cdots + \delta_{in} A_n \qquad (8\text{ a})$$

Dette sidste System af n lineære Ligninger og deres inverse, der gælder for vilkaarlige Værdier $A_1, A_2, \cdots, A_n$, viser, at $d_{ik} = \pm 1$. Indenfor det kommutative Omraade er (6) den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for den samtidige Bestaaen af (7) og (8), eller (7 a) og (8 a), indenfor det ikke-kommutative Omraade derimod kun en nødvendig Betingelse for den samtidige Bestaaen af (3) og (4). Denne Betragtning viser, at Sætningen $d_{ik} = \pm 1$ ikke er nogen dybere Sætning i Regningen med ikke-kommutative Elementer, da den i Grunden ikke har med Regningens ikke-kommutative Karakter at gøre. Vi har jo kunnet bevise den alene ved at benytte den Omstændighed, at det ikke-kommutative Omraade omfatter det kommutative, en Omstændighed, man altid med Fordel kan benytte som Kontrol og for at finde nødvendige Betingelser ved Regning med ikke-kommutative Elementer.

§ 5. Ækvivalente reducerede Systemer.

En Systemklasse, d. v. s. Samlingen af alle med et givet System og derfor med hverandre ækvivalente Systemer, vil i Almindelighed indeholde flere reducerede Systemer. Lad $S = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ og $T = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ være to ækvivalente reducerede Systemer. Vi har altsaa

$$\beta_i = \Pi^{(i)}(\alpha_i^{\pm 1}) \qquad (9)$$

men ogsaa

$$\alpha_i = \psi^{(i)}(\beta_j^{+1}) = \psi^{(i)}\left(\Pi^{(j)}(\alpha_k^{\pm 1})^{\pm 1}\right) \qquad (10)$$

(10) er en Identitet i α-erne for alle Værdier af i. Ser vi saa et Øjeblik helt bort fra, at α-erne og β-erne er Produkter af de oprindelige Frembringere a, og opfatter α-erne som Frembringere til en fri Gruppe G_m, ses T at være et Primitivsystem i α-erne. Deraf følger $p \geqq m$. Ved at ombytte Systemernes Rolle har man $m \geqq p$, altsaa $m = p$:

Sætning 4: Alle reducerede Systemer af samme Klasse har samme Elementantal. — Vi vil kalde det »Klassens Grundtal«.

I Forbindelse med Sætningerne 2 og 3 ses nu umiddelbart:

Digitized by Google

Sætning 5: Et uafhængigt Systems Elementantal er Minimum indenfor dets Klasse, lig Klassens Grundtal; og hvert System i Klassen med dette Elementantal er uafhængigt.

Er altsaa et System afhængigt, da vil ethvert dermed ækvivalent System med samme eller større Elementantal ligeledes være afhængigt.

Vi vil se nærmere paa Forholdet mellem de to ovennævnte reducerede Systemer S og T. Overgangen fra S til T er altsaa en isomorf Transformation i α-erne og omvendt. Lad d_{ik} være den algebraiske Sum af α_k's Eksponenter i β_i. Vi ved, at $|d_{ik}| = \pm 1$. Altsaa skal mindst eet af denne Determinants Led være $\neq 0$. Vi vælger et bestemt Led af denne Art. Det har m Faktorer, som alle er $\neq 0$ og fordeler sig paa alle Determinantens Rækker og ligeledes paa alle dens Søjler. Dette Led bestemmer altsaa en enentydig Parring mellem Determinantens Rækker og Søjler, altsaa mellem Elementerne i T og S af den Art, at ethvert af S' Elementer forekommer som Faktor i det dermed korresponderende Element af T. Da Systemernes Egenskaber jo er uafhængige af Elementernes Orden, kan vi tænke os Indekstallene i S og T fordelt saaledes, at α_i korresponderer med β_i, altsaa er Faktor i β_i. Det ses let, at et vilkaarligt Produkt af et reduceret Systems Elementer har mindst ligesaa stort g-Tal som hver af dets Faktorer. Vi har altsaa

$$g(\beta_i) \geqq g(\alpha_i) \qquad (11)$$

Her har vi nu ikke paa Forhaand Ret til at ombytte Systemernes Rolle, da vi ikke ved, om den samme Parring kan bruges for Frembringelsen af S ved T. Men vi kan slutte:

$$\sum_{i=1}^{m} g(\beta_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$

Og da vi her har Ret til at ombytte Systemernes Rolle, følger

$$\sum_{i=1}^{m} g(\beta_i) = \sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$$

altsaa i Forbindelse med (11)

$$g(\beta_i) = g(\alpha_i).$$

Digitized by Google

Sætning 6: Ækvivalente reducerede Systemer har samme g-Tal og samme Fordeling af dette paa de enkelte Elementers g-Tal.

Da der kun findes et endeligt Antal Systemer med samme g-Tal, faas herved

Sætning 7: Hver Systemklasse indeholder kun et endeligt Antal af reducerede Systemer.

Læseren vil ved Hjælp af de reducerede Systemers Grundegenskaber til et forelagt reduceret System let kunne konstruere de dermed ækvivalente reducerede Systemer i et endeligt (og i Almindelighed lille) Antal Skridt.

De reducerede Systemer i en Klasse udmærker sig fremfor de andre uafhængige Systemer i Klassen egentlig kun ved den praktiske Betydning de har, naar det gælder at løse et forelagt Frembringelsesproblem, som i § 3. Med Hensyn til en Undergruppes Frembringelse skal vi anse alle uafhængige Systemer for lige gode. Af de ovennævnte Klasseinvarianter m, $\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$ og Talsystemet $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \cdots, g(\alpha_m)$ er altsaa den første, Klassens Grundtal, den der har den egentlige systematiske Betydning. Ved Etableringen af den isomorfe Sammenhæng mellem S og T i denne § benyttede vi os kun af, at begge Systemer var uafhængige og ækvivalente, ikke af deres specielle Egenskab som reducerede Systemer. Vi har da dette Resultat:

Sætning 8: Kender man en given Gruppes Frembringelse ved et uafhængigt Elementsystem, findes alle andre Frembringelser ved uafhængige Elementsystemer ved Hjælp af alle mulige isomorfe Transformationer anvendte paa det første Systems Elementer.

En given Gruppes Fremstilling som fri Gruppe er altsaa, hvis den er mulig, bestemt paa en isomorf Transformation nær. Disses Antal er uendeligt, men man kan bestemme dem alle ad systematisk Vej ved at gaa ud fra et passende endeligt Sæt iblandt dem og kombinere disse [1]).

[1]) Se Math. Annalen 79, Side 271—272.

Digitized by Google

STUDENTERFORENINGEN

Almindelige Bemærkninger om Anvendelsen i Gruppeteorien.

For at karakterisere de forestaaende Undersøgelsers Betydning for Gruppeteorien rigtigt, skal man fremhæve, at den finder sin Begrænsning ved, at disse Metoder kun er tilstrækkelige til en Gruppes Behandling, naar denne kan fremstilles som fri Gruppe. Dette er for de almindelige diskontinuerte Gruppers Vedkommende kun det simpleste Tilfælde. De almindelige diskontinuerte Gruppers Teori i det særlig interessante Tilfælde, at de er uendelige, men kan frembringes ved et endeligt Antal af Elementer, er i nyere Tid særlig bleven behandlet af M. Dehn[1]). Den karakteristiske Vanskelighed, disse Undersøgelser frembyder i Sammenligning med de her gennemførte, ligger i følgende:

Lad $A = a_1, a_2, \cdots, a_n$ igen være et Frembringersystem til en Gruppe G, hvis Elementer altsaa gives som Produkter af a-erne. Forskellen ligger nu i Elementernes Identificering. Der antages at være givet et System af Elementer $R_1, R_2, \cdots, R_m$, som ikke er 1 i den hidindtil betragtede Gruppe G_n, d. v. s. ikke ved Forkortning i a-erne viser sig at være lig med 1, men som ved Definition fastsættes til at være 1 i G. Disse Relationer $R_l = 1$, der altsaa ikke er Identiteter i a-erne, kaldes de »definerende Relationer«. Det vil nu være tilladt at stryge Komplekset R_l af Frembringere, hvorsomhelst det forekommer i denne Rækketølge i et Element, og ligeledes at indføje det efter Forgodtbefindende. Elementernes Udtryk i Frembringerne bliver derved i høj Grad ubestemt. Saaledes vil Gruppeelementet 1 ikke alene kunne skrives $\Pi(a_i^{+1})$, hvor dette er lig 1 identisk i a-erne; men ogsaa f. Eks. $\Pi(R_i^{+1})$, hvor dette Produkt ikke kan bortforkortes helt i R-erne og heller ikke i a-erne. Men den egentlige Vanskelighed ligger i følgende: $\Phi R_l \Phi^{-1}$ vil jo ogsaa være 1, naar Φ er et vilkaarligt Element; derfor vil ogsaa ethvert Produkt $\Pi(\Phi R_i^{+1} \Phi^{-1})$ med vilkaarlig mange Faktorer og vilkaarligt Valg af Φ i hver Faktor være 1. Gruppens Definition sker nu ved, at der fastsættes, at et Element skal være lig 1, naar og kun naar det kan skrives paa denne Form $\Pi(\Phi R_i^{+1} \Phi^{-1})$. Dehn synes at være den første, der klart har fremhævet, at dette logisk hører med til Gruppens Definition. Dermed er det prin-

[1]) Af en Række Afhandlinger af M. Dehn om dette Emne skal her særlig fremhæves: »Über unendliche diskontinuierliche Gruppen« i Math. Ann. 71.

Studenterforeningens
Digitized by Google

cipielt afgjort, om to Produkter P og Q i Frembringerne betyder det samme Element i G: Det er Tilfældet, naar og kun naar der eksisterer en i a-erne identisk Ligning

$$PQ^{-1} = \Pi(\Phi R_l^{\pm 1} \Phi^{-1})$$

Men samtidig opstaar Problemet, at træffe en Afgørelse i et endeligt Antal Skridt om, hvorvidt en saadan Fremstilling eksisterer eller ikke, naar P, Q og $R_1, \cdots, R_m$ gives ved deres Udtryk i a-erne. Dette »Identitetsproblem«, som Dehn har kaldt det, er altsaa en Udvidelse af det i § 3 omhandlede »Frembringelsesproblem«, men dets almindelige Løsning har hidindtil frembudt uovervindelige Vanskeligheder. Forholdet mellem disse to Problemer kan passende erkendes ved, at man sammenligner den her i § 3 fremstillede Metode med de Løsninger, man kender for Identitetsproblemet i specielle Tilfælde [1]), og den grafiske Behandling af Identitetsproblemet, man kommer til ved at anvende det af Dehn indførte »Gruppebillede« [2]). Mens man ved Løsningen af Frembringelsesproblemet sætter Elementerne i Række paa alle mulige Maader — man kunde tale om et »lineært« Problem — fremstiller man i Gruppebilledet Elementerne R_l ved Polygoner og sætter disse ved Behandling af Identitetsproblemet sammen i en Plan. Dette sidste Problem har altsaa, med et Udtryk af Dehn, »en Dimension mere« end det første. Om dette er en virkelig eller kun en tilsyneladende Rangforskel, med andre Ord, om det kan lykkes, ud fra Systemet $R_1, R_2, \cdots, R_m$ at konstruere et andet endeligt System, der tillader at føre et forelagt Identitetsproblem tilbage til et Frembringelsesproblem, staar uafgjort.

---

[1]) Smlg. f. Eks. M. Dehn: »Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen« i Math. Ann. 72.

[2]) Se M. Dehn: »Über die Topologie der dreidimensionalen Raume« i Math. Ann. 69, særlig Side 140 ff.

Digitized by Google

Tre Foredrag over Geometriens Grundlag.

Af J. Hjelmslev.

II. Kongruens.

1. Jeg skulde tro, at det er en almindelig udbredt Antagelse, at Kvadratnettets Eksistens, svarende til ethvert Par paa hinanden vinkelrette Retninger, er ensbetydende med, at den Euklidiske Geometri gælder uindskrænket. Men ved det sidste Eksempel, jeg opstillede i mit forrige Foredrag, vil man have set, at det ikke er Tilfældet. Men hvad er det da egentlig, der mangler? Ja, det er — naar man vil blive ved Kvadratnettet — det, at man ikke er sikker paa, at de foreliggende Kvadrater har lige store Diagonaler; hvis man kommer i Nærheden af de farlige Retninger, gælder det ikke.

Det, der mangler, er et almindeligt Flytningspostulat. Som saadant har jeg allerede antydet, at man kunde tænke paa Tilføjelsen i Euklids 17. Definition, Halvcirkelaksiomet, idet man forstaar dette saaledes, at de to Dele, hvori Diameteren deler Cirklen, kan bringes til Dækning: Til hvert Punkt paa den ene Halvcirkelperiferi skal svare et Punkt paa den anden; til en Korde i den ene svarer en lige saa stor Korde i den anden. Føjer man hertil, at Korden ligger inden i Cirklen, vil det kunne vises, at man har et fuldstændigt Grundlag for Euklids Geometri.

2. Vi vil imidlertid ikke tage alt dette op paa een Gang. For at skabe Sikkerhed for den bedst mulige Økonomi med Postulaterne vil vi foretrække at vente lidt med at tale om Cirkler. Vi vil ikke en Gang forudsætte Cirklens Eksistens. Vi udelader altsaa Postulat III. Det Grundlag, vi vil arbejde med, omfatter saaledes Euklids Postulater I, II, IV, V samt de almindelige Størrelsesaksiomer, og hertil føjer vi nu følgende Flytningspostulat (Postulat VI):

Enhver Trekant kan flyttes saaledes, at 2 Vinkelspidser bliver liggende uforandret, medens den tredje skifter Plads.

Til en given Trekant ABC vil med andre Ord sikkert svare en anden ABC', saaledes at tilsvarende Stykker i de to Trekanter overalt er lige store. At der ikke kan være mere end een Trekant ABC', svarende til en given Trekant ABC, ses

Digitized by Google

ved de almindelige Størrelsesaksiomer (idet man fører et indirekte Bevis under Anvendelse af Aks. 5). Endvidere ses det, at C og C' ikke kan ligge paa samme Side af AB.

3. Det Postulat VI, vi her har opstillet, vil være i god Overensstemmelse med Euklids Indledning. Euklid vil, til at begynde med, kun forudsætte Flytning af et Liniestykke med uforandret Endepunkt (hvilket er det væsentlige reelle Indhold af Post. III), hvorimod han vil føre Bevis for, at et Liniestykke kan flyttes saaledes, at det ene Endepunkt føres hen til et givet Punkt (Euklid udtrykker sig anderledes; men vi lægger ikke Vægt herpaa, da det ikke rummer nogen Realitet). Hans Flytningsaksiom for Trekanten burde da netop have en lignende Form: Flytning af en Trekant med en fast Side er altid mulig. Jeg minder imidlertid om, at vi i vort System udelader Post. III, og at vi som Følge heraf overhovedet ikke har noget særligt Flytningsaksiom for Liniestykker. Vi har ikke Midler til at kunne afsætte et Liniestykke AC, = et givet Liniestykke AB, ud ad en Halvlinie, der udgaar fra A, og vort Flytningspostulat giver ikke noget Middel til direkte Udførelse af Flytninger, der fører et givet Punkt over i et givet Punkt eller en given Linie over i en given Linie. Om saadanne Flytninger eksisterer, kan vi altsaa ikke vide paa Forhaand. Vi har ikke andre Flytninger (af Liniestykker, Vinkler, Trekanter) til Raadighed end saadanne, som kan udføres ved ovenstaaende Postulat VI, idet vi dog naturligvis betragter det som en Selvfølge, at Resultatet af 2 Flytninger efter hinanden ogsaa betegnes som en Flytning.

Vi skal nu i det følgende se, hvor vidt vi kan naa med de angivne Postulater (i Forbindelse med de almindelige Størrelsesaksiomer, anvendt paa Liniestykker og Vinkler).

4. Lad der være givet en ret Linie l samt et Punkt P uden for Linien (Fig. 7). Paa l vælger vi 2 Punkter A og B. Trekanten PAB flyttes til $P'AB$. P og P' ligger paa modsat Side af l. Man har nu

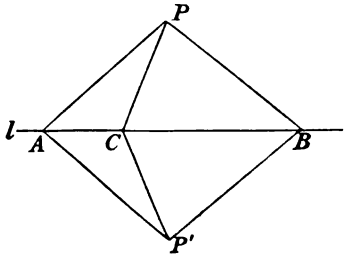


Fig. 7.

$$\angle P'AB = PAB,$$
$$P'A = PA.$$

Lad C være et Punkt imellem A og B. Trekanten PAC flyttes

Digitized by Google

til $P''AC$. Det kan da bevises, at P'' falder i P'. Man skal nemlig have

$$\angle P''AC = PAC,$$

altsaa ogsaa

$$\angle P''AB = PAB.$$

samt

$$P''A = PA,$$

Men efter ovenstaaende Ligninger følger heraf, at

$$\angle P''AB = P'AB,$$
$$P''A = P'A,$$

og da P' og P'' skal ligge paa samme Side af AB, maa de falde sammen (Størrelsesaksiom 5).

Paa lignende Maade ses, at Trekanten PBC kan flyttes til $P'BC$.

Punktet C var her valgt imellem A og B, men Betragtningerne gennemføres lige saa let, naar C ligger paa Forlængelsen af AB.

Af ovenstaaende fremgaar det da, at enhver Trekant med Toppunkt i P og Grundlinie paa l kan flyttes saaledes, at Grundlinien ligger fast, og P gaar over i P'. Forbindelsen mellem P og P' ved Flytning af en bestemt Trekant PAB til en ny Stilling $P'AB$, er med andre Ord uafhængig af, hvorpaa l Punkterne A og B vælges. Til hvert Punkt P paa den ene Side af l svarer paa denne Maade et bestemt Punkt P' paa den anden Side af l. P og P' betegnes som hinandens Spejlbillede med Hensyn til l. Er M et vilkaarligt Punkt af l, vil Liniestykkerne PM og $P'M$ være hinandens Spejlbilleder d. v. s. et vilkaarligt Punkt Q af Liniestykket PM vil have sit Spejlbillede Q' liggende paa Liniestykket $P'M$. Er nemlig N et vilkaarligt Punkt paa l (forskelligt fra M), har man:

$$\angle PMN = P'MN, \quad \angle QMN = Q'MN,$$

og da

$$\angle PMN = QMN,$$

har man ogsaa

$$\angle P'MN = Q'MN.$$

Halvlinierne MP' og MQ' maa altsaa falde sammen. Endvidere har man

$$MP = MP', \quad MQ = MQ',$$

hvoraf Sætningen følger. Man har ogsaa

$$PQ = P'Q'.$$

Digitized by Google

5. Overgangen fra Punkter paa den ene Side af l til Spejlbillederne paa den anden Side af l betegnes som en Spejling med Hensyn til l. Punkterne paa l siges at være deres egne Spejlbilleder. En Halvlinie, der udgaar fra et Punkt M af l og ligger paa den ene Side af l svarer ved Spejlingen til en Halvlinie, der udgaar fra det samme Punkt og ligger paa den anden Side af l. En Vinkel, hvis ene Ben falder paa l, svarer til en (lige saa stor) Vinkel paa den anden Side af l; man ser derved, at en Vinkel kan flyttes saaledes, at eet af Benene forbliver uforandret. En Halvlinie, der udgaar fra et Punkt af l, begrænser 2 Nabovinkler langs l; ved Spejling føres disse over i 2 lige saa store Nabovinkler paa den anden Side af l. Ved Hjælp heraf bevises følgende Sætning:

Naar 2 rette Linier skærer hinanden, dannes der 4 Vinkler. Er een af disse ret, vil ogsaa de 3 andre være rette.

At en Vinkel α er ret, vil jo sige, at den er lig en af sine Nabovinkler (hvilken af dem det nu er). Men saa har vi to lige store Nabovinkler α og β beliggende paa hver sin Side af en af de givne Linier; de maa da svare til hinanden ved Spejling med Hensyn til denne Linie. Deres Nabovinkler γ og δ maa derfor ogsaa svare til hinanden ved den samme Spejling. De er derfor lige store, og da de tillige er Nabovinkler indbyrdes, er de rette. Altsaa α og β er rette, γ og δ ligesaa. Alle 4 Vinkler er altsaa rette. Efter Post. IV er altsaa alle 4 Vinkler lige store.

6. Heraf følger da videre, at naar en Halvlinie a_1 er oprejst vinkelret paa en Linie b i et Punkt O af b, da vil dens Forlængelse a_2 ogsaa være vinkelret paa b (i det samme Punkt); endvidere vil enhver af de Halvlinier, hvori b er delt af O, være vinkelret paa den fuldstændige rette Linie a, der udgøres af a_1 og a_2. De to Linier a og b siges da at være vinkelrette paa hinanden. Altsaa har man følgende Sætning: To Linier er vinkelrette paa hinanden, naar en af de Vinkler, de danner, er ret. Endvidere: Enhver Vinkel, som er Nabovinkel til en ret Vinkel, er selv en ret Vinkel.

7. Fra et Punkt P uden for en Linie l kan nedfældes en vinkelret paa Linien.

P har Spejlbilledet P' med Hensyn til l. Da P og P' ligger paa modsat Side af l, skæres Liniestykket PP' af

Digitized by Google

et Punkt C. Er nu A et vilkaarligt Punkt af l (forskelligt fra C), har man $\angle PCA = P'CA$, og da de to Vinkler er Nabovinkler, er de begge rette. Herved er bevist, at $PP' \perp l$.

8. Fra et Punkt P uden for en Linie l kan ikke fældes 2 vinkelrette paa l. Thi disse vilde ved Forlængelse gaa gennem P', og dette strider mod Post. I—II.

9. Heraf følger nu, at 2 Linier, der er vinkelrette paa samme Linie, maa være parallele (d. v. s. de skærer ikke hinanden). Skal man gennem et Punkt P drage en Parallel med l kan det ske derved, at man først fælder en vinkelret m paa l, som ikke gaar gennem P, og dernæst fra P fælder en vinkelret paa m. Men om der muligvis kunde være andre Linier gennem P, som ogsaa opfylder Betingelsen, er ikke hermed bevist. Dette vil imidlertid følge af Post. V (se 13).

10. Naar 2 Linier a og b er vinkelrette paa samme Linie l, vil enhver Linie vinkelret paa den ene ogsaa

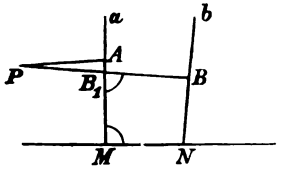


Fig. 8 a.

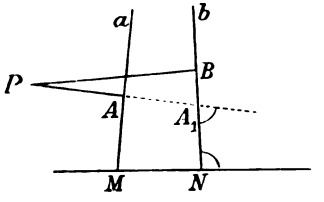


Fig. 8 b.

være vinkelret paa den anden. Vi vælger et Punkt P som falder uden for l og uden for Mellemrummet mellem a og b og fælder de vinkelrette PA og PB paa a og b. Det gælder om at vise, at PA og PB i Virkeligheden falder paa een og samme rette Linie. Dette vises indirekte. Hvis ikke, vil Figuren enten være som 8 a eller som 8 b viser det. Men i 8 a vilde vi da faa 2 Vinkler ved B_1 og M, hvoraf den ene er spids og den anden ret. PB maatte da efter Postulat V skære l, men dette er umuligt. I Fig. 8 b er Forholdene lidt anderledes; men PA maa dér enten skære MN eller NB. Det første kan ikke finde Sted, og det andet vilde medføre, at de to mærkede Vinkler ved A_1 og N var henholdsvis spids og ret, saaledes at PA_1 maatte skære l, hvilket er umuligt. PA og PB maa altsaa nødvendigvis falde paa een ret Linie, hvilket skulde bevises.

Digitized by Google

Af Sætningen følger, at i en Firkant med 3 rette Vinkler er den fjerde Vinkel ogsaa ret.

11. I et Punkt P af en Linie l kan oprejses en vinkelret paa Linien.

Man fælder først en vinkelret m paa l. Gaar m ikke gennem P, fældes atter en vinkelret n paa m, forskellig fra l. Fælder man nu til sidst fra P en vinkelret paa n, da vil den herved fundne Linie være den søgte (følger af den foregaaende Sætning om Firkanten).

12. Topvinkler er lige store. Sætningen bevises som Euklid 14, 15.

Endvidere ses det, at naar 2 Vinkler er lige store, er Nabovinklerne ogsaa lige store. Følger af, at 2 rette = 2 rette, og af Størrelsesaksiom 3.

13. Naar 2 Linier a og b skæres af en tredje under lige store ensliggende Vinkler, er Linierne parallele.

Lad de to Linier skæres af den tredje i P og Q. De to indvendige Vinkler ved P og Q paa samme Side af PQ, vil da tilsammen være 2 rette. Dersom nu a og b ikke var parallele, kunde man gennem P drage en Linie a' parallel med b. Men Følgen vilde blive den, at a' og b ved Skæring med PQ vilde danne to indvendige Vinkler med PQ (enten paa den ene Side af PQ eller paa den anden) som tilsammen var mindre end 2 rette, og dette vilde stride imod Post. V.

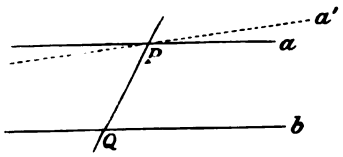


Fig. 9.

Derimod kan man ikke straks udtale sig om, hvorvidt parallele Linier vil skæres af enhver Transversal under lige store ensliggende Vinkler. Man ved overhovedet ikke noget om, hvorvidt man kan afsætte den ene Vinkel ved den anden, saa der i det hele taget kan blive Tale om Ligestorhed eller Uligestorhed. Derimod kan man sige, at naar to Linier er parallele, vil enhver Linie vinkelret paa den ene ogsaa være vinkelret paa den anden. Heraf følger, at der gennem et Punkt uden for en Linie kan drages een og kun een Linie parallel med en given.

Digitized by Google

14. Vi skal nu i det følgende gaa lidt nærmere ind paa Spejlingens Grundegenskaber. Vi har set, at Spejlingen med Hensyn til en ret Linie l fører et Punkt P paa den ene Side af l over i et tilsvarende Punkt P' paa den anden Side. Punkterne paa l bliver uforandrede. En Halvlinie a udgaaende fra et Punkt O paa l føres over i en Halvlinie a'. Forlængelserne a_1 og a_1' af de to Halvlinier vil ogsaa føres over i hinanden. Dette følger af Sætningen om, at Topvinkler er lige store. Thi $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ medfører, naar $\alpha = \beta$, netop, at $\gamma = \delta$, hvilket viser, at a_1 og a_1' føres over i hinanden ved Spejlingen.

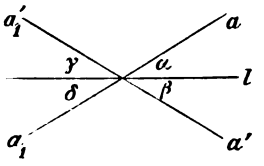


Fig. 10.

Man kan derefter sige, at Spejlingen fører enhver ret Linie, der skærer l, over i en ret Linie, der skærer l i samme Punkt. Linien l svarer til sig selv.

15. Enhver Linie m, som er parallel med l, vil ved Spejlingen føres over i en Linie m' parallel med l. Dette vises saaledes: To vilkaarlige Punkter P og Q paa m føres over i 2 Punkter P' og Q'. Den rette Linie gennem P' og Q' vil være parallel med l; i modsat Fald vilde den nemlig skære l, og heraf vilde følge, at den rette Linie PQ ogsaa skulde skære l, men dette vilde stride imod, at m var parallel med l. Altsaa ses det, at alle Punkter P, Q, R, ... paa m ved Spejlingen føres over i saadanne Punkter P', Q', R', ..., hvis Forbindelseslinier skal være parallel med l, men det betyder netop, at alle disse Punkter ligger paa een og samme Linie parallel med l, og hermed er Sætningen bevist.

16. En Vinkel vil ved Spejling føres over i en lige saa stor Vinkel. I det Tilfælde da Vinklens Toppunkt falder uden for l, og Vinkelbenene skærer l, følger Sætningen umiddelbart af Flytningspostulatet. Skærer Vinklens ene Ben l, og det andet Bens Forlængelse skærer l, følger Sætningen af, at lige store Vinkler ogsaa har lige store Nabovinkler. Skæres l af Forlængelserne af begge Vinklens Ben, anvender man blot Sætningen om, at Topvinkler er lige store. Falder Vinklens Toppunkt paa l, ved man allerede fra det foregaaende, at Sætningen gælder, naar det ene Vinkelben falder sammen med l, og de andre Tilfælde kan derefter behandles ved Hjælp af Størrelsesaksiomerne 2 og 3.

Digitized by Google

Tilbage staar da kun det Tilfælde, da Vinklens ene Ben er parallel med l. Vi betragter først det Tilfælde, da Vinklen er ret, altsaa det ene Ben $\neq l$, det andet vinkelret paa l; men det er da klart, at man ved Spejlingen atter faar en Vinkel, hvis ene Ben er parallel med l, medens det andet er vinkelret paa l, altsaa netop en ret Vinkel, saa i dette Tilfælde gælder Sætningen (Post. IV). Har man endelig en Vinkel, hvis ene Ben er parallel med l, det andet ikke vinkelret paa l, kan denne Vinkel fremstilles som Summen (eller Differensen) af en ret Vinkel, hvis ene Ben er parallel med l og en anden Vinkel, hvis Ben begge skærer l, og ved Anvendelse af Størrelsesaksiomerne 2 og 3 ses det da, at Sætningen er rigtig.

17. Tilsvarende Liniestykker er lige store. I det almindelige Tilfælde, hvor Liniestykkerne ikke er parallele med l, er Sætningen allerede indeholdt i det foregaaende (S. 3 f. n.). I det specielle Tilfælde, hvor AB (og $A'B'$) er parallel med l, kan man forbinde A og A' med et Punkt M af l. (AM ikke $\perp l$). AB spejles i AM til AB_1, $A'B'$ i $A'M$ til $A'B'_1$. Det er da klart, at AB_1 og $A'B'_1$ er hinandens Spejlbilleder med Hensyn til l. Altsaa har man $AB_1 = A'B'_1$, og da $AB_1 = AB$, og $A'B'_1 = A'B'$, har man ogsaa $AB = A'B'$, hvilket skulde bevises.

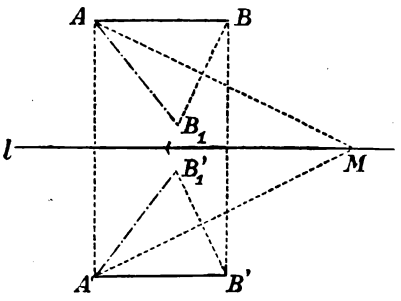


Fig. 11.

18. 3 Spejlinger kan sammensættes til een, naar Akserne gaar gennem samme Punkt.

Lad det Punkt, hvorigennem alle Spejlingsakserne gaar, være O. Punktet O ligger fast. En vilkaarlig Linie l gennem O vil efter de 3 Spejlinger enten være ført over i en ny ret Linie l' eller over i sig selv. I første Tilfælde vil alle skærende Linier til l føres over i skærende Linier til l' under lige saa store Skæringsvinkler.

Lad nu Punktet A paa l svare til A' paa l'. Man har da $OA = OA'$. Halvlinien OA svarer til Halvlinien OA'. Men da hver af de 3 Spejlinger vender alle Omløbsretninger om, vil den Flytning, som er dannet af dem, ogsaa vende Omløbs-

Digitized by Google

retningerne om, og heraf følger, at Vinklen mellem de to Halvlinier OA og OA' vil blive vendt om, saaledes at de to Halvlinier bytter Plads. De to Punkter A og B paa den første Halvlinie svarer da ogsaa paa dobbelt Maade til de tilsvarende Punkter A' og B' paa den anden Halvlinie. Linierne AB' og $A'B$ vil derfor være dobbelt tilsvarende. Deres Skæringspunkt S maa da svare til sig selv. Men heraf følger, da baade O og S ligger fast, at hele Flytningen maa være en Spejling med Hensyn til OS.

Vi forudsatte her l forskellig fra l'. Falder l sammen med l', kan der indtræffe 2 Tilfælde, enten vil et Punkt A af l svare til det samme Punkt, og Flytningen er da en Spejling med Hensyn til l, eller ogsaa svarer A til et andet Punkt, og Flytningen vil da være en Spejling med Hensyn til den vinkelrette paa l i O.

Sætningen er dermed bevist i alle Tilfælde.

19. 3 Spejlinger med Hensyn til parallele Akser kan sammensættes til een.

En fælles vinkelret l paa de 3 Spejlingsakser a, b, c vil ved de 3 Spejlinger vendes om, saa den faar modsat Løb. P svarer derfor til P'' paa dobbelt Maade. En Linie m gennem P svarer til en Linie m' gennem P' ogsaa paa dobbelt Maade, da Omløbsretningerne er modsatte. m og m' skærer hinanden i Q. Den vinkelrette s fra Q paa l vil da være den søgte Spejlingsakse s. Ellers vilde nemlig QP ved Spejling i s gaa over i QP'', hvor P'' forskelligt fra P', og saa vilde der blive 2 hinanden skærende Linier QP' og QP'', der skæres af l under lige store ensliggende Vinkler, og dette er umuligt.

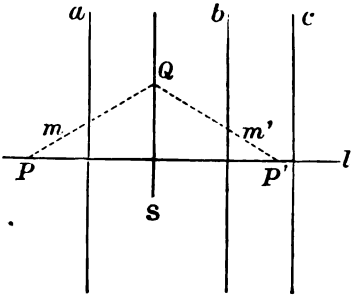


Fig. 12.

20. 3 Spejlinger, hvis Akser a, b, c gaar gennem samme Punkt eller er parallele, kan altsaa sammensættes til een. Den ved de 3 Spejlinger bestemte Flytning betegnes med abc. Tager vi Akserne i den omvendte Orden, faar vi den omvendte Flytning cba, men da Flytningen er en Spejling, har man

$$abc = cba.$$

Digitized by Google

21. Naar 3 Spejlinger a, b, c kan sammensættes til een, maa Akserne enten gaa gennem samme Punkt eller være parallele.

Skærer nemlig a og b hinanden i et Punkt P, der ikke ligger paa c, skulde dette Punkt ved Flytningen abc føres over i sit Spejlbillede med Hensyn til c, og man skulde da have

$$abc = c,$$

hvilket er umuligt, naar ikke $a = b$.

Skærer b og c hinanden i et Punkt, der ikke ligger paa a, kan man paa lignende Maade betragte Flytningen cba. Man vilde da faa

$$cba = a,$$

hvilket er umuligt, naar ikke $b = c$.

Heraf følger da, at enten maa a, b og c gaa gennem samme Punkt, eller ogsaa er de alle parallele. (Specielt kan 2 af Akserne falde sammen).

22. Ved 2 Spejlinger med Hensyn til parallele Akser a og b vil enhver Linie l, som ikke er vinkelret paa a og b, gaa over i en Linie l' parallel med l. Dersom l og l' skulde skære hinanden i et Punkt P, da maatte dette, naar l ikke er $\perp a$ og b, føres over i sig selv. P's Spejlbillede med Hensyn til a skulde da være det samme som med Hensyn til b; men dette er umuligt, naar a og b er 2 forskellige Linier.

23. Ethvert Liniestykke har et Midtpunkt.

Lad Liniestykket være AB. Gennem A og B drages 2 Paralleler a og b (ikke vinkelrette paa AB). b' er Spejlbilledet af b med Hensyn til den vinkelrette r paa AB i B. b' skærer a i S. Den vinkelrette fra S paa AB er s. Da nu de to Spejlinger i r og s skal føre b over i en Linie parallel med b, og denne Linie maa gaa gennem Skæringspunktet S mellem b' og s, maa den falde sammen med a, d. v. s. a og b' er hinandens Spejlbilleder med Hensyn til s. Da nu den rette Linie gennem A og B er sit eget Spejlbillede med Hensyn til s, vil A og B

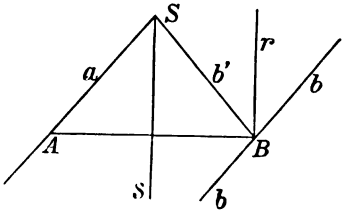


Fig. 13.

Digitized by Google

være hinandens Spejlbilleder med Hensyn til s, d. v. s. s skærer AB i Liniestykkets Midtpunkt. At der ikke kan være mere end eet Midtpunkt, følger af Størrelsesaksiomerne.

24. I et Parallelogram er modstaaende Sider lige store.

$ABCD$ er et Parallelogram. s er $\perp BC$ i B, og t er $\perp BC$ i dennes Midtpunkt. Spejlinger gennem s og t, udførte efter hinanden, fører B over i C, Linien BA over i en dermed parallel gennem C, A over i et Punkt beliggende paa Linien AD ($\perp s$ og t). Som Følge deraf maa A gaa over i D. AB gaar derfor over i DC, altsaa er $AB = DC$. Paa lignende Maade kan man vise, at ogsaa det andet Par Sider er lige store.

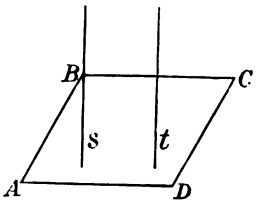


Fig. 14.

Den af 2 Spejlinger gennem parallele Akser sammensatte Flytning kan betegnes som en Parallelforskydning. Afstanden fra et Punkt til det tilsvarende Punkt har konstant Størrelse og Retning. Tilsvarende Linier er parallele eller sammenfaldende.

25. At Liniestykket har et Midtpunkt, fører straks til det Resultat, at et vilkaarligt Punkt ved Spejling kan føres over i et vilkaarligt Punkt. Der gives altsaa Flytninger, der fører et hvilket som helst Punkt over i et hvilket som helst Punkt. Derved er Euklids Sætn. 2 bevist, og, vel at mærke, uden at benytte Cirkler eller deres Skæring.

26. Parallelforskydningens Eksistens viser nu, at to parallele Linier skæres af enhver Transversal under lige store ensliggende Vinkler.

27. Har man givet 3 Linier, a, b, a_1, som gaar gennem samme Punkt, eller er parallele, kan man altid finde en fjerde Linie b_1, gennem det samme Punkt, resp. parallel med de givne Linier, saaledes, at Spejlingerne gennem a og b frembringer en Flytning, der er ensbetydende med den, som frembringes af Spejlingerne gennem a_1 og b_1. Vi skriver dette kort

$$ab = a_1 b_1 .$$

Sætningens Rigtighed følger umiddelbart af Sætningerne i 18 og 19. De tre Spejlinger a_1, a og b kan nemlig sammensættes til een. Betegnes denne med b_1, har man

Digitized by Google

$$a_1ab = b_1,$$

hvoraf følger

$$a_1a_1ab = a_1b_1,$$

eller

$$ab = a_1b_1.$$

Efter denne Regel kan man paa mange Maader erstatte 2 Spejlinger med 2 andre. Ved Anvendelse heraf eftervises det let, at 4 Spejlinger kan reduceres til 2 (hvis de ikke specielt helt ophæver hverandre); heraf følger da almindeligt, at et lige Antal Spejlinger kan reduceres til 2, og et ulige Antal til 3 (i specielle Tilfælde til 1)[1]).

28. Er a, b, a_1, b_1 4 Spejlingsakser gennem samme Punkt O, og Systemet ab kan føres over i Systemet a_1b_1 ved en Flytning, der er sammensat af 2 Spejlinger u og v (hvis Akser gaar gennem O), da vil man have $ab = a_1b_1$.

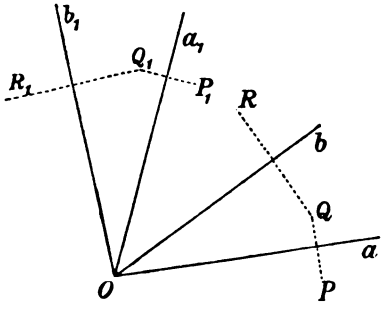


Fig. 15.

Er nemlig P et Punkt, der ved Flytningen uv føres over i P_1, og gaar P over i Q ved Spejlingen a, Q i R ved Spejlingen b, og ligesaa P_1 i Q_1 ved Spejlingen a_1, Q_1 i R_1 ved Spejlingen b_1, da vil hele Systemet $abPQR$ ved Flytningen uv føres over i Systemet $a_1b_1P_1Q_1R_1$. Herved ses det da, at Transformationerne

$$uva_1b_1 \quad \text{og} \quad abuv$$

er ensbetydende.

Den første Flytning fører nemlig P over i R_1 (ved uv gaar P over i P_1, ved a_1 gaar P_1 over i Q_1, ved b_1 gaar Q_1 over i R_1). Den anden Flytning fører ligeledes P til R_1.

Da nu

$$uva_1b_1 = (uva_1)b_1 = (a_1vu)b_1 = a_1vub_1 = a_1(vub_1) = a_1b_1uv,$$

har man ogsaa

$$a_1b_1uv = abuv$$

eller

$$a_1b_1 = ab$$

hvilket skulde vises.

[1]) Se Nyt Tidsskr. f. Mat. B, 1907, S. 1.

Digitized by Google

Saafremt altsaa de to Systemer (ab) og (a_1b_1) kan bringes til Dækning ved et lige Antal Spejlinger, vil heraf følge, at $a_1b_1 = ab$.

29. Omvendt kan man ikke vide, om Ligningen $a_1b_1 = ab$ ikke rummer andre Muligheder, hvor Systemerne (a_1b_1) og (ab) ikke kan bringes til Dækning ved en Flytning af den omtalte Art. Men dette giver Anledning til, at vi indfører følgende nye Udtryksmaader:

Et System af 2 rette Linier a og b, der skærer hinanden, og som tages i en bestemt Orden, skal betegnes som en fuldstændig Vinkel (ab). To fuldstændige Vinkler (ab) og (cd) kaldes ækvivalente, saafremt 4 Linier a', b', c', d' gennem samme Punkt og parallele med (specielt sammenfaldende med) de givne, tilfredsstiller Flytningsligningen

$$a'b' = c'd'.$$

Heraf følger da, at den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at 2 fuldstændige Vinkler (ab) og (cb) er ækvivalente, er den, at de kan bringes til Dækning ved en Flytning, der er sammensat af 2 Spejlinger. At (ab) er ækvivalent med (cd) skrives saaledes:

$$(ab) \sim (cd).$$

30. Fuldstændige Vinkler med parallele Ben er ækvivalente. Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at a er parallel med b, er den, at der eksisterer en Linie x saaledes, at

$$(ax) \sim (bx).$$

Af

$$(ab) \sim (a'b'), \quad \text{og} \quad (bc) \sim (b'c'),$$

følger

$$(ac) \sim (a'c').$$

Er

$$(ab) \sim (cd),$$

da er ogsaa

$$(ac) \sim (bd).$$

Thi, er

$$ab = cd$$

har man ogsaa

$$abbc = cdbc,$$

eller

$$ac = ccbd,$$

$$ac = bd.$$

Digitized by Google

31. Er a, b, a' 3 Linier gennem samme Punkt, kan man i Følge 27 altid finde en Linie b' gennem dette Punkt, saaledes, at $(ab) \sim (a'b')$. Denne Sætning udvides let til følgende: Er a, b, a' 3 vilkaarlige givne Linier, kan man gennem et givet Punkt drage een og kun een Linie b' saaledes, at $(ab) \sim (a'b')$.

32. Er $(ab) \sim (ba)$, vil a og b være vinkelrette paa hinanden. Dette ses straks, naar man vælger et Punkt P paa a, og benytter, at Spejlingerne a og b skal have samme Virkning paa P som Spejlingerne b og a.

Alle rette Vinkler er ækvivalente.

Ethvert Par Spejlinger i to paa hinanden vinkelrette Linier gennem et givet Punkt O kan nemlig sammensættes til een bestemt Flytning, nemlig den, som fører alle fra O udgaaende Halvlinier over i de modsatte Halvlinier.

33. Vi gaar nu over til at definere en Transformation, som vi kalder en Halvdrejning om et Punkt O. Den karakteriseres paa følgende Maade: Enhver ret Linie a gennem O føres over i en tilsvarende ret Linie a' gennem O saaledes, at (aa') er ækvivalent med en given fuldstændig Vinkel (der dog ikke maa være ret). Endvidere føres ethvert Punkt af a over i sin Projektion paa a'. Man kan bevise om en saadan Transformation, at den fører enhver ret Linie over i en ret Linie. Gaar den rette Linie gennem O, følger dette umiddelbart af Definitionen. I det almindelige Tilfælde vil Sætningen fremgaa af følgende

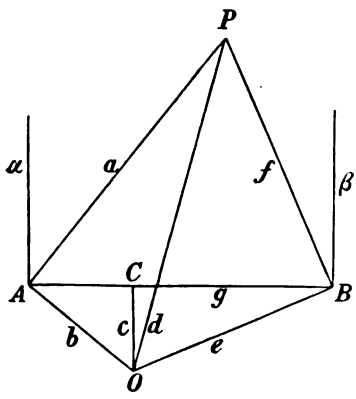


Fig. 16.

Hjælpesætning: a og f er to Linier, der skærer hinanden i P. Fra O er fældet de vinkelrette $OA = b$, $OB = e$ paa disse. AB betegnes med g. Fra O fældes den vinkelrette C paa g. Man har da

$$(bc) \sim (de).$$

Bevis:

α og β er de vinkelrette paa g, oprejst i henholdsvis A og B. Man har

Digitized by Google

Universitetsbiblioteket

$$ab = \alpha g,\ gc = cg,\ ef = g\beta,$$

altsaa

$$abcef = \alpha gcef = \alpha cgef = \alpha cgg\beta = \alpha c\beta.$$

Da denne sidste Transformation er en Spejling med Hensyn til en vis Linie $x \perp g$, har man altsaa

$$a(bce)f = x.$$

(bce) er imidlertid en Spejling, hvis Akse y gaar gennem O, og da

$$ayf = x,$$

maa Linierne a, y, f gaa gennem samme Punkt d. e. y gaar gennem P. Da y saaledes gaar gennem baade O og P, falder den sammen med d. Ligningen

$$bce = d$$

giver nu netop

$$bc = de,$$

hvilket skulde bevises.

34. Det er nu klart, at en Halvdrejning om O, som fører A over i C, vil føre P over i B, og lader man P gennemløbe a, vil B gennemløbe g d. v. s. Halvdrejningen fører a over i g. Det ses endvidere, at parallele Linier føres over i parallele Linier, og at fuldstændige Vinkler føres over i dermed ækvivalente fuldstændige Vinkler.

Den omvendte Transformation betegnes som en invers Halvdrejning.

35. Ved vilkaarlig Sammensætning af (direkte og inverse) Halvdrejninger om O opstaar en Gruppe Transformationer, som vi vil betegne som Ækvivalenstransformationer om O. Det karakteristiske ved disse Transformationer er, at O ligger fast, ret Linie føres over i ret Linie, fuldstændig Vinkel over i en dermed ækvivalent fuldstændig Vinkel.

Der gives een og kun een Ækvivalenstransformation om O, der fører et vilkaarligt givet Punkt A (forskelligt fra O) over i et andet vilkaarligt givet Punkt A_1 (forskelligt fra O).

At der ikke kan være mere end een Ækvivalenstransformation om O, der opfylder Betingelserne, følger af, at tilsvarende fuldstændige Vinkler skal være ækvivalente. Enhver Linie a gennem A faar nemlig da en ganske bestemt tilsvarende Linie

Digitized by Google

a_1 gennem A_1 (de fuldstændige Vinkler (OA, a) og (OA_1, a_1) skal være ækvivalente), og da tillige enhver Linie gennem O faar en eentydig bestemt tilsvarende Linie, er det klart, at ethvert Punkt i Planen faar et bestemt tilsvarende Punkt — hvis Transformationen i det hele eksisterer.

At Transformationen virkelig eksisterer, ses saaledes: Naar O, A og A_1 ikke ligger paa samme Linie, fældes fra O en vinkelret OA_2 paa AA_1. Man danner da først en direkte Halvdrejning, der fører A til A_2, derpaa tilføjer man en invers Halvdrejning, der fører A_2 til A_1, og herved er den søgte Transformation bestemt.

Ligger O, A, A_1 paa ret Linie, kan man først indføre et Punkt A_2 uden for denne Linie. Den søgte Transformation vil da kunne dannes ved Sammensætning af en Ækvivalenstransformation, der fører A til A_2, og en anden, der fører A_2 til A_1.

36. To hvilke som helst Ækvivalenstransformationer T og U om O er ombyttelige. Det vil være tilstrækkelig at føre Beviset for det Tilfælde, da den ene Transformation (T) er en Halvdrejning. Lad A og A' være et Par tilsvarende Punkter i denne Transformation. Trekanten OAA' er da retvinklet ved A' (hvis det er en direkte Halvdrejning) eller ved A (hvis det er en invers Halvdrejning). Den anden Transformation U fører nu denne Trekant over i en Trekant af samme Art, $OA_1A'_1$, hvor Vinklen ved A'_1 (henholdsvis A_1) ogsaa er ret, og hvor den fuldstændige Vinkel (OA_1, OA'_1) er ækvivalent med (OA, OA'), d. v. s. A_1 og A'_1 er tilsvarende ved Transformationen T. Men heraf følger netop

$$UT = TU.$$

37. Ved Sammensætning af de her betragtede Transformationer med vilkaarlige Parallelforskydninger faas en ny Gruppe af Transformationer, de almindelige Ækvivalenstransformationer. Disse karakteriseres ved, at Punkt svarer til Punkt, ret Linie til ret Linie, fuldstændig Vinkel til en dermed ækvivalent fuldstændig Vinkel.

Det følger straks af det foregaaende, at en almindelig Ækvivalenstransformation lader sig bestemme paa eentydig Maade saaledes, at 2 givne Punkter A og B føres over i 2 vilkaarlig givne Punkter A_1 og B_1.

38. I en Ækvivalenstransformation svarer Liniestykke til Liniestykke, Halvlinie til Halvlinie, Vinkel til Vinkel. Hidtil

Digitized by Google

har vi talt om ækvivalente fuldstændige Vinkler. Vi kan nu ogsaa tale om ækvivalente Vinkler. Dermed menes Vinkler, der kan svare til hinanden i en Ækvivalenstransformation. Man kan da f. Eks. udtale den Sætning, at man ud fra en given Halvlinie til en given Side for denne kan afsætte een og kun een Vinkel, ækvivalent med en given.

39. Af Størrelsesaksiomerne følger, at lige store Vinkler med samme Orientering er ækvivalente. Lad Vinklerne have samme Toppunkt O; den ene begrænses af Halvlinierne a og b, den anden af c og d. De to Spejlinger gennem Linierne a og b kan sammensættes til en Drejning, d. e. en Flytning, hvorved hver Halvlinie ud fra O føres over i en tilsvarende Halvlinie ud fra O ved Afsætning af det dobbelte af Vinklen (ab). Paa lignende Maade gaar det med Spejlingerne c og d, og da $(ab) = (cd)$, har man ogsaa $2\,(ab) = 2\,(cd)$. Og heraf følger da, at $(ab) \sim (cd)$.

40. Derimod kan man ikke have Sikkerhed for, at Sætningen kan vendes om, idet der ikke i vore Forudsætninger er udtalt, at der fra en given Halvlinie kan afsættes en Vinkel lige stor med en given. Vi har lige bevist, at man ud fra en given Halvlinie kan afsætte en Vinkel ækvivalent med en given. Ved Undersøgelse af Størrelsesaksiomerne ses det endvidere, at disse for Vinklers Vedkommende alle vil være tilfredsstillede, naar man i Stedet for »lige stor« sætter »ækvivalent« (i Stedet for »Ligestorhed« »Ækvivalens).

Man kan da sige saaledes: Dersom den oprindelige forelagte Geometri arbejder med et Begreb »Ligestorhed for Vinkler«, der ikke tilsteder at afsætte en Vinkel ud fra en hvilken som helst Halvlinie og lig en hvilken som helst Vinkel, da er det muligt at udvide dette Begreb, saaledes at man i Stedet for »lige store Vinkler« sætter »ækvivalente Vinkler«, hvorefter Afsætningen af Vinklen bliver mulig, medens der iøvrigt intet er forstyrret i Postulaternes eller Størrelsesaksiomernes Gyldighed.

Problemet om Afsætning af en Vinkel ud fra en given Halvlinie er dermed løst, alene paa Grundlag af vort specielle Flytningspostulat VI.

41. Ækvivalenstransformationerne giver os Midler i Hænde til at opstille en Proportionslære og derved at opstille en analytisk Geometri. De to Hovedsætninger, der her bliver Brug

Digitized by Google

for: Sætningen om at to Trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ med parvis parallele Sider er »ækvivalente« (Linierne AA_1, BB_1, CC_1 gaar gennem samme Punkt, eller er parallele), og at en Sekskant $ABCDEF$, der er indskrevet i et Liniepar ab, og i hvilken to Par modstaaende Sider (AF, CD), (BC, EF) er parallelle, ogsaa vil have det tredje Par (AB, DE) parallele, skal lige nævnes.

Den første Sætning fremgaar umiddelbart deraf, at der eksisterer en Ækvivalenstransformation omkring Skærings-

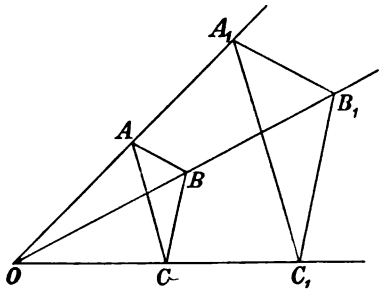


Fig. 17.

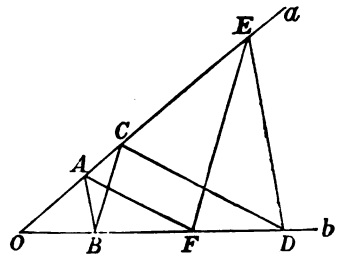


Fig. 18.

punktet (AA_1, BB_1), og ved hvilken A føres over i A_1. B vil da føres til B_1 og C til C_1.

Den anden vises ved, at de to Ækvivalenstransformationer (om O), der fører A til C og C til E, kan ombyttes. Tages de i den her nævnte Orden føres A over i E. Tages de i den omvendte Orden føres B til D. Altsaa er AB parallel med DE.

Hvorledes man derefter gaar videre, betragter vi som bekendt.

42. Læren om Ligedannethed (der bliver det samme som vi her har kaldt »Ækvivalens«) samt hele Projektivgeometrien lader sig altsaa opbygge paa de Postulater I, II, IV, V og VI, som vi her har arbejdet med. Men der er dog noget i Euklids Geometri, vi mangler. Det, der mangler, udtrykker man maaske simplest ved at henvise til Sætningerne om den ligebenede Trekant. Den ene af dem, den, der siger, at en Trekant med 2 lige store Vinkler er ligebenet, kan vi let bevise ved Spejling med Hensyn til den vinkelrette paa Midten af Grundlinien, hvorved de to lige store Vinkler gaar over i hinanden. Men den anden Sætning, den, der siger, at i en ligebenet Trekant er Vinklerne ved Grundlinien

Digitized by Google

lige store, har vi ikke, og den kan ikke bevises paa dette Grundlag. Hvis man ved, at Topvinklen kan halveres, vil Sætningen let kunne vises ved Spejling. Og det, der mangler, kan netop sammenfattes i et almindeligt Postulat om, at en Vinkel har en Halveringslinie (eller: to Halvlinier, der udgaar fra samme Punkt, har en Spejlingsakse). Heri vil ogsaa rummes den i Post. III udtrykte Egenskab, at et Liniestykke kan flyttes over paa en Halvlinie med Endepunkt i et af Liniestykkets Endepunkter.

At det nævnte Postulat er uafhængigt af de øvrige, skal vises i det følgende.

43. Man kan ogsaa udfylde Mangelen paa en anden Maade, idet man dels antager Postulat III (i ovennævnte Betydning) og dels et nyt Postulat VII, der udsiger, at i en retvinklet Trekant er Hypotenusen større end enhver af Kateterne. Heraf vil nemlig for det første følge, at i en stumpvinklet Trekant er den Side, der ligger over for den stumpe Vinkel større end enhver af de andre Sider; har man dernæst en ligebenet Trekant ABC ($AB = AC$), og man fra Toppunktet A fælder den vinkelrette AD paa BC, vil de to Trekanter ADB og ADC ved Spejling i AD gaa over i hinanden. I modsat Fald vilde $\triangle ADC$ ved Spejlingen i AD gaa over i en Trekant ADB_1, hvor B_1 er forskellig fra B. Men saa vilde der eksistere en ligebenet Trekant ABB_1 med en stump Vinkel ved Grundlinien, og dette er umuligt. Sætningen om den ligebenede Trekant er dermed bevist. Samtidig er det (ved Post. III) da ogsaa bevist, at en Vinkel har en Halveringslinie.

Det skal endnu blot tilføjes, at man, som det straks vil ses, kan sætte Halvcirkelaksiomet (fra 17. Definition) i Stedet for VI, og at man i Stedet for VII kan tage det Postulat, at Korden ligger inden i Cirklen.

44. Endelig skal nævnes endnu en Løsning af Euklids Kongruensproblem. Vi har hidtil kun anvendt Størrelsesaksiomerne paa Liniestykker og Vinkler. Euklid anvender dem ogsaa paa Arealer. Lad os undersøge, hvor vidt man derved kan naa.

Det er for det første klart, at man paa Grundlag af I, II, IV, V, VI alene kan naa gennem alle Arealsætningerne i Euklids 1ste Bog, derunder ogsaa den pythagoreiske Læresætning. Ved Hjælp af denne kan man da forsøge at bevise Sætningen om den ligebenede Trekant. Der forlanges hertil kun,

Digitized by Google

at 2 retvinklede Trekanter, som har Hypotenusen og en Katete stykkevis lige store, ogsaa vil have den anden Katete stykkevis lige store. Dette følger af den pythagoreiske Læresætning, saa snart man ved, at lige store Kvadrater maa have lige store Sider. Man kan da sige, at Euklids Geometri lader sig opbygge paa de af Euklid opstillede Aksiomer og Postulater uden andet Flytningspostulat end VI, naar man blot tilføjer et Postulat om, at lige store Kvadrater maa have lige store Sider.

45. Som Eksempel paa en Geometri, i hvilken Postulaterne I, II, IV, V, VI alle gælder, men hvor en Vinkel ikke altid har en Halveringslinie, skal nævnes den, som dannes af alle de rationale Punkter $(x.y)$ i den Euklidiske Parameterplan, idet Definitionerne af ret Linie, Afstand o. s. v. er den sædvanlige. Er $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (1,1)$, har Vinklen AOB ingen Halveringslinie. Paa Linien $y = x$ kan man ikke afsætte Stykket OA, saaledes at Post III ikke gælder i denne Geometri. Men hele den i det foregaaende fremsatte Lære om Ækvivalens gælder og bliver i Virkeligheden ensbetydende med Læren om Ligedannethedstransformationer inden for det rationale Omraade.

46. Dernæst vil vi vise et Eksempel paa en Geometri, hvor samtlige Postulater I, II, III, IV, V, VI gælder, men hvor VII ikke gælder. Vi benytter atter Samlingen af rationale Punkter i den aritmetiske xy-Plan. De rette Linier defineres ved Ligninger med rationale Koefficienter. Vinkler maales paa den sædvanlige Maade. Maaling af Liniestykker foregaar saaledes, at Kurven $x^2 + y^2 = 1$ er Enhedskurve for alle de Linier gennem Begyndelsespunktet, der skærer den (altsaa f. Eks. for Linierne $y = 0$, $x = 0$, $y = \frac{3}{4}x$, o. s v, $x^2 + y^2 = 2$ er Enhedskurve for alle de Linier gennem Begyndelsespunktet, som skærer den, o. s. v., idet man til Bestemmelse af Enhedspunkterne (d. e. Endepunkter af Længde 1 afsat ud fra Begyndelsespunktet) benytter Kurverne $x^2 + y^2 = a$, hvor a gennemløber hele Tal, der ikke er delelige med noget Kvadrattal. At VII ikke gælder i denne Geometri ses derved, at Trekanten AOB med Vinkelspidser $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ er retvinklet ved A, men Kateten OA og Hypotenusen OB er begge $= 1$.

47. Den Interesse, der særlig knytter sig til den foregaaende Fremstilling, er den, at det er lykkedes at gennemføre

Digitized by Google

en geometrisk Lærebygning paa Grundlag af I, II, IV, V, VI alene. Denne Lærebygning er ført saa vidt, at Projektivgeometrien er grundlagt. At Euklids Kongruenslære kræver et Par supplerende Postulater for at kunne fastlægges, er mindre væsentligt. Projektivgeometrien aabner nemlig Vejen til ved frie Definitioner at indføre enhver Maalgeometri, ogsaa den Euklidiske; men for at gøre det kan det ganske vist blive nødvendigt at udvide det Omraade, der foreligger, med nogle definitionsmæssigt indførte nye Elementer (nye Punkter og Linier). Ud fra dette Synspunkt kan det da siges, at de nævnte Postulater I, II, IV, V, VI er tilstrækkelige til Begrundelse af den plane Geometri. Det er dog indlysende, at vi ved hele denne Fremstilling, der er holdt saa nær som mulig til den Ramme, Euklid har givet, har set bort fra en aksiomatisk Formulering af Beliggenhedsegenskaber (angaaende Ordningen af Punkter paa en ret Linie, den rette Linies Deling af Planen i 2 adskilte Dele, o. l). En saadan Formulering er gennemført af Pasch og Hilbert, og dette Problem behøver ikke at beskæftige os her.

48. Vi vender nu et Øjeblik tilbage til det 4de Postulat. Det er muligt, at Zeuthen kan have Ret i den Betragtning, at dette Postulat skal minde om den empiriske Fremstilling af rette Vinkler ved Hjælp af en Gnomon, paa lignende Maade som Postulaterne I—II skal minde om den empiriske Fremstilling af rette Linier ved Lineal, og Postulat III om den empiriske Fremstilling af Cirkler ved Passer. Men en saadan Betragtning kunde ogsaa føre til et noget videregaaende Resultat. Netop i Tilslutning til I, II, III vilde det ud fra dette Synspunkt være naturligt at opstille som Postulat IV: I et hvilket som helst Punkt af en ret Linie lader sig oprejse en vinkelret paa Linien. Og hertil vilde det være naturligt at føje, at: Alle rette Vinkler er lige store. Denne sidste Tilføjelse kunde passende, netop med Henblik paa Anvendelsen af Gnomon, tages i følgende Betydning: Retvinklede Trekanter med stykkevis lige store Kateter kan bringes til Dækning.

49. Paa denne Maade kommer man da til den fra et empirisk Synspunkt simpleste Formulering af Forudsætningerne for Euklids Geometri:

Man antager Postulaterne I, II, III; IV udvides til:

Digitized by Google

IVa. I et hvilket som helst Punkt af en ret Linie lader sig oprejse en vinkelret paa Linien.

IVb. Retvinklede Trekanter med stykkevis lige store Kateter kan bringes til Dækning (saaledes at de rette Vinkler dækker hinanden, og tilsvarende lige store Kateter dækker hinanden).

Postulat V medtages uforandret.

Det System, man herved kommer til, er simplere end Euklids og simplere end Hilberts. Det indeholder nemlig kun et Flytningspostulat angaaende retvinklede Trekanter. Og hertil kommer, at dette Postulat i sig selv rummer en konstruktiv Afsætning af Vinkler (en spids Vinkel direkte, som Vinkel i en retvinklet Trekant, en stump Vinkel som Nabovinkel til en spids; at lige store Vinkler har lige store Nabovinkler følger af IVa, der straks viser, at en Vinkel og dens Nabovinkel tilsammen udgør 2 rette).

Vi skal i det følgende se, hvorledes Kongruenslæren vil forme sig paa dette Grundlag.

50. Fra et Punkt P uden for en Linie l kan ikke fældes mere end een vinkelret paa Linien. Var der nemlig 2, PA og PB, kunde man forlænge PA til Q (ud over A) saaledes at $AQ = PA$. Man vilde da have 2 Trekanter PAB og QAB, der i Følge IVb kan dække hinanden. Deraf vilde da følge, at $\angle QBA$ var ret, altsaa at BQ laa i Forlængelsen af PB, og de to rette Linier PAQ og PBQ havde altsaa 2 Punkter fælles, hvilket strider imod Postulat I.

I en retvinklet Trekant er Vinklerne ved Hypotenusen spidse. Enhver spids Vinkel, som indgaar i en retvinklet Trekant, kan afsættes ved Flytning af selve Trekanten.

51. Topvinkler er lige store. Vises ved IVa som Euklid 15.

52. I en retvinklet Trekant er Hypotenusen større end enhver af Kateterne. Beviset føres indirekte: Var $AB = AC$ (Fig. 19), kunde man i B oprejse en vinkelret paa AB og ud ad den afsætte $BD = BC$ til samme Side for AB som C. Man vilde da have 2 retvinklede Trekanter, som i Følge IVb kunde bringes til Dækning. Altsaa maatte $\angle BAD$ dække BAC d. v. s. AD maatte falde ud ad Linien AC. Da endvidere $\angle ABC$ er spids, medens ABD er ret, maatte D falde paa Forlængelsen af AC. Tillige skulde man have $AD = AB = AC$, hvilket er umuligt.

Digitized by Google

Var endvidere $AB < AC$, kunde man paa Forlængelsen af AB ud over B finde et Punkt B_1, saaledes at $AB_1 = AC$.

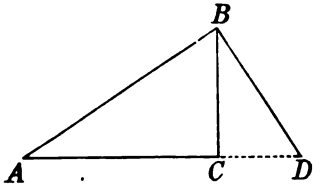


Fig. 19.

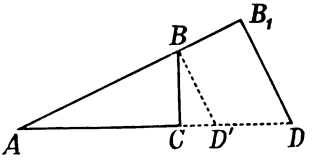


Fig. 20.

I B_1 kunde derefter oprejses en vinkelret $B_1D = BC$, og man vilde da faa en retvinklet Trekant AB_1D, der kunde bruges til Dækning med ABC. Dette vilde betyde, at $\angle BAC$ dækkes af B_1AD, altsaa at D ligger paa Linien AC; da endvidere den vinkelrette paa AB_1 i B gaar ind imellem A og D, vil den skære Liniestykket AD i et Punkt D'. Men saa var

$$AD > AD' > AC,$$

men da $AD = AB$, vil dette medføre, at

$$AB > AC,$$

hvilket strider imod, hvad der var forudsat.

Altsaa kan AB hverken være lig med eller mindre end AC. Den maa da være større end AC, hvilket skulde bevises.

53. Det er derefter en simpel Sag at vise, at i en stumpvinklet Trekant er den Side, der ligger overfor den stumpe Vinkel, større end enhver af de andre Sider.

54. To retvinklede Trekanter er kongruente, naar de har Hypotenusen og en Katete lige store. Trekanterne vilde ellers ved Flytning kunne bringes i saadanne Stillinger ABC og AB_1C, som Fig. 21 viser; men saa vilde man have en Trekant ABB_1, hvor Vinklen B_1 var stump samtidig med, at den overfor liggende Side var lig en af de andre Sider, og dette strider imod den foregaaende Sætning.

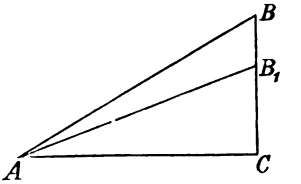


Fig. 21.

55. To retvinklede Trekanter er kongruente, naar de har en Katete og en hosliggende Vinkel stykkevis lige store. Vises ved en lignende Flytning som den foregaaende Sætning.

Digitized by Google

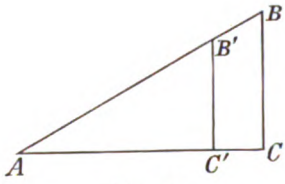


Fig. 22.

56, To retvinklede Trekanter er kongruente, naar de har Hypotenusen og en spids Vinkel stykkevis lige store. Det er nemlig klart, at naar man i en retvinklet Trekant beholder en spids Vinkel og gør den hosliggende Katete mindre, vil Hypotenusen blive mindre (se Fig.).

57. To retvinklede Trekanter er kongruente, naar de har en Katete og en modstaaende Vinkel stykkevis lige store. I modsat Fald kunde man have 2 retvinklede Trekanter ABC og $A'B'C$ med den i Fig. 23 angivne Beliggenhed samtidig med, at $BC = B'C'$.

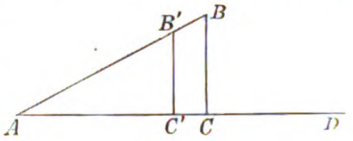


Fig. 23.

Men hvis man saa afsatte $CD = AC'$, vilde man have $\triangle BCD$ kongruent med $B'C'A$, og tillige $\triangle B'C'D$ kongruent med BCA, hvoraf vilde følge, at Vinklerne CDB og $C'DB'$ maatte dække hinanden, saa at Punkterne D, B og B' maatte ligge paa en ret Linie. De to rette Linier $AB'BD$ og $AC'CD$ vilde imidlertid faa 2 Punkter fælles.

58. Fra et Punkt P udenfor en Linie l kan fældes en vinkelret ned paa Linien. I Q oprejses en vinkelret q (Fig. 24). Det antages, at den ikke gaar gennem P. Et Punkt R paa l vælges saaledes, at P og R falder paa hver sin Side af q. PR skærer q i S. $QS_1 = QS$ afsættes paa q. RS_1 drages og ud ad den afsættes til samme Side $RP_1 = RP$. PP_1 skærer l i M og kan vises at være vinkelret paa l i dette Punkt; thi hvis den ikke var $\perp l$, vilde man i M kunne oprejse en vinkelret n, som enten maatte gaa ind i $\angle PMR$ eller i $\angle RMP_1$. Vi antager det første (det andet Tilfælde behandles paa tilsvarende Maade). Den vil da skære RP i et Punkt N. Afsættes nu paa n $MN = MN_1$, vil Trekanterne RMN og RMN_1 være kongruente. Og da $\angle QRS = QRS_1$,

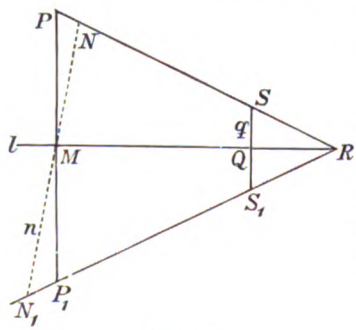


Fig. 24.

Digitized by Google

maa Linien RS_1P_1 indeholde N_1. Altsaa er N_1 et Skæringspunkt mellem Forlængelsen af RP_1 og Linien n. Nu er

$$RN_1 = RN, \quad RP_1 = RP,$$

men samtidig er

$$RN_1 > RP_1, \quad RN < RP,$$

hvilket er umuligt.

Den vinkelrette paa l i M maa da være MP. Altsaa kan man fra P fælde en vinkelret paa l.

59. Herefter er det nu klart, at man kan konstruere en retvinklet Trekant, der indeholder en given spids Vinkel. Og ved at flytte denne Trekant kan man afsætte Vinklen. En stump Vinkel kan flyttes ved, at man flytter dens Nabovinkel.

60. Naar 2 Trekanter ABC og $A_1B_1C_1$ har $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, da er ogsaa

$$\angle B = \angle B_1, \ \angle C = \angle C_1, \ BC = BC_1.$$

Er A og A_1 rette, følger Sætningen af Postulat IVb. Er A og A_1 spidse, fælder man Højderne BD og B_1D_1 (Fig. 25).

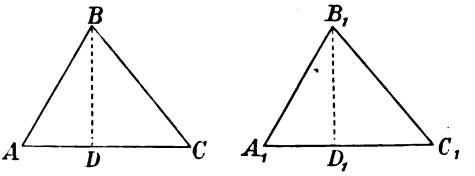


Fig. 25.

Man har da

$$AB = A_1B_1, \quad \angle BAD = B_1A_1D_1.$$

De to retvinklede Trekanter ABD og $A_1B_1D_1$ er da kongruente. Altsaa

$$AD = A_1D_1, \quad BD = B_1D_1.$$

Er $AD < AC$, da er ogsaa $A_1D_1 < A_1C_1$, og Differenserne DC og D_1C_1 er lige store. Er $AD > AC$, er ogsaa $A_1D_1 > A_1C_1$. og da har man atter $DC = D_1C_1$. Men saa er Trekanterne BDC og $B_1D_1C_1$ kongruente, altsaa $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$, hvilket skulde bevises.

Vi antog her, at Vinklerne A og A_1 var spidse. Men var de stumpe, vilde Beviset kunne gennemføres paa lignende Maade.

Digitized by Google

61. At et Liniestykke har et Midtpunkt, vises saaledes: I A og B oprejses 2 lige store Stykker AC og BD vinkelrette paa AB (Fig. 26.) Trekanterne BAC og ABD er da kongruente. Linierne BC og AD skærer hinanden i O. Fra O fældes den vinkelrette OM paa AB. M er Midtpunktet af AB.

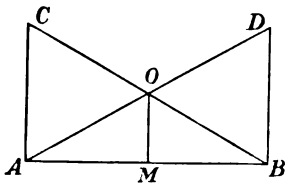


Fig. 26.

Trekanterne OMA og OMB er nemlig kongruente, da de har en Katete (OM) fælles, og dennes modstaaende Vinkler $\angle ABC$ og $\angle BAD$ er lige store. Altsaa er $AM = MB$.

62. At en Vinkel har en Halveringslinie, vises saaledes. Ud ad Vinklens Ben afsætte lige store Stykker $AM = AN$. Den vinkelrette AP fra A paa MN vil da halvere Vinklen. Thi Trekanterne APM og APN er kongruente (Fig. 27).

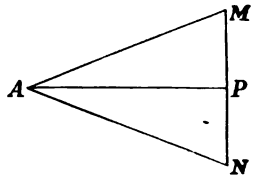


Fig. 27.

63. Vi har endnu ikke brugt Postulat V. Og vi kan, naar vi følger de Udviklinger, jeg tidligere har fremsat i Math. Annalen, 64. Bd., helt undvære dette Postulat, idet man kan gøre Rede for alle de Muligheder, som kommer for, naar man udelader det. Ud fra dette Synspunkt kan man da sige, at den plane Geometri lader sig bygge op alene ved Postulaterne I, II, III, IV_a og IV_b.

64. Men vil man særlig begrænse sig til Euklids Geometri, som den, der ligger Erfaring og Anskuelse nærmest, da kan Begrænsningen naturligvis foretages ved Tilføjelse af det 5te Postulat. I Stedet for at benytte den Form, Euklid har givet det, vilde man dog kunne vælge mange andre Former. Og netop med Henblik paa Erfaring og Anskuelse vilde det være naturligere at vælge det Postulat, at der eksisterer en Firkant med lutter rette Vinkler[1]).

Paa denne Maade ledes man ind paa den Figur, som giver os det simpleste Grundlag for Plangeometrien, nemlig Rektanglet. Og ud fra selve Euklids System naar man da til Opstilling af følgende System af Forudsætninger for Euklids Geometri:

---

[1]) Se min Afhdl. om Trekantens Vinkelsum, Math. Tidsskr. A, 1919, S. 1.

Digitized by Google

Gennem 2 Punkter kan lægges een og kun een ret Linie.

I et Punkt af en ret Linie kan oprejses en vinkelret paa Linien.

Alle rette Vinkler er kongruente.

Der eksisterer Rektangler med givne Dimensioner. Rektangler med de samme Dimensioner er kongruente.

Litteraturanmeldelser.

E. Bally: Géométrie analytique des unicursales de troisième classe et de quatrième ordre (Gauthier-Villars et Cie), 98 S.

Efter et indledende Kapitel om Cycloider i al Almindelighed følger tre Kapitler om Trihypocycloiden og Monoepicycloiden, navnlig om den første. Det femte og sidste Kapitel handler om Rumkurven af tredje Orden og en Plans Skæringskurve med dens udfoldelige Flade. Forfatteren forudsætter paa nogle Steder, at Læserens Viden i synthetisk Geometri strækker sig noget udover det almindeligst kendte. Fremstillingen er ret kortfattet. I sit Forord meddeler Forf., at Bogen er et Uddrag af et geometrisk Værk, der senere skal udkomme, og at han anser en enkelt Sætning deri for ny. P. Kobbernagel.

Danske Eksamensopgaver.

1. Del af polyteknisk Eksamen 1921.

Deskriptiv Geometri.

Dobbelt retvinklet Projektion. En Kugle K med given Radius R rører vandret Billedplan i det givne Punkt o. En Omdrejningscylinder C, hvis Frembringere er parallele med lodret Billedplan, rører vandret Billedplan langs en Linie gennem o. Radius i Cylinderens Normalsnit er $r = \frac{3}{4}R$. Skæringskurven S mellem K og C skal bestemmes i lodret og vandret Billede.

Digitized by Google

1. I vandret Billede bestemmes de Punkter, som ligger paa Kuglens og Cylinderens Konturer, de øverste Punkter p og q og et Punkt a, som har Afstanden $\frac{1}{2}R$ over vandret Billedplan, samt Tangenten i a_V. Endvidere bestemmes Tangenterne i o_V.

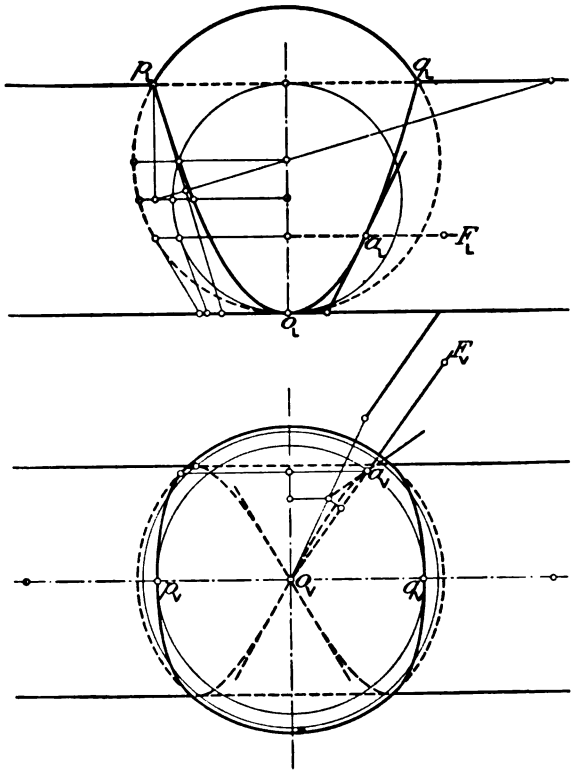
2. Vis (analytisk), at S_L er en Parabelbue.

3. Bestem den oskulerende Plan til S i Punkterne p og q.

4. Find Krumningsradius til S_V i Punkterne p_V og q_V.

5. En Konoide med vandret Retningsplan har S og Kuglens lodrette Diameter D til Ledelinier. Bestem den Frembringer F, som gaar gennem a, og Konoidens Tangentplan i det Punkt paa F, der ligger dobbelt saa langt fra D som a.

Løsningen fremgaar af Figuren.



Digitized by Google

Matematik II.

1. Find Arealet af det mellem Kurverne

$$r = a\sin\theta \quad \text{og} \quad r = a\sin\theta - b, \quad 0 \leqq \theta < \pi, \quad 0 < b < a,$$

liggende Omraade, samt Voluminet af det Legeme, der fremkommer ved at dreje det nævnte Omraade om Figurens Symmetriakse (*Y*-Aksen).

2. Find Tangenten til Rumkurven

$$xy - l.\,(y+z) + xyz - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0$$

i Punktet (2, 1, 0). Find dernæst med 2den Tilnærmelse (d. v. s. paa nær en Fejl $o(x-2)^2$) y og z udtrykt ved x i Nærheden af Punktet (2, 1, 0).

Løsninger.

1. Man finder

$$\text{Areal} = 2\left\{\frac{a^2}{2}\int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{b}{a}} \sin^2\theta d\theta + \tfrac{1}{2}\int_{\operatorname{Arcsin}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\theta - (a\sin\theta - b)^2)d\theta\right\}$$
$$= \frac{a^2 + 2b^2}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{b}{a} - \frac{\pi b^2}{2} + \frac{3b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\text{Volumen} = 2\pi\int_0^{\operatorname{Arcsin}\frac{b}{a}} \cos\theta d\theta \int_0^{a\sin\theta} r^2 dr + 2\pi\int_{\operatorname{Arcsin}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_{a\sin\theta - b}^{a\sin\theta} r^2 dr$$
$$= \frac{\pi}{6}\frac{b}{a}(4a^3 - 6a^2b + 4ab^2 - b^3).$$

2. Man finder

$$\frac{dy}{dx} = -2, \quad \frac{dz}{dx} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -6, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 15,$$

altsaa

$$y = 1 - 2(x-2) - 3(x-2)^2 + o(x-2)^2,$$
$$z = (x-2) + \tfrac{15}{2}(x-2)^2 + o(x-2)^2;$$

Tangenten har Ligningerne $y = 1 - 2(x-2)$, $z = (x-2)$.

Digitized by Google

Opgaver til Løsning.

7. Idet $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ betegner den Riemannske Zetafunktion, altsaa

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \qquad (\sigma > 1),$$

og idet N angiver et vilkaarligt givet positivt helt Tal, skal man (ved at benytte Sammenhængen mellem Dirichletske Rækker og Potensrækker i uendelig mange Variable, se Göttinger Nachrichten 1913 p. 441—488) bestemme øvre Grænse $G(\sigma_0)$ for Funktionen $|\zeta(s)(1 - N^{1-s})|$ paa en vilkaarlig lodret Linie $\sigma = \sigma_0 > 1$ samt undersøge, hvorledes denne øvre Grænse $G(\sigma_0)$ forholder sig for $1 \leftarrow \sigma_0$. H. Bohr.

Bøger tilsendt Redaktionen.

Christian Huygens, Oeuvres complètes. Tome quatorsième. 4°. 556 p. (La Haye, Martinus Nijhof. 1920).

Thomas Jan Stieltjes, Oeuvres complétes Tome 2. 4°. 604 p. (Groningen. P. Noordhoff. 1918).

G.-H. Halphen, Oeuvres. Tome 3. 518 p. (Paris. Gauthier-Villars et Cie. 1921).

C. Neumann, Beiträge zum Studium der Randwertaufgaben. 348 p. (Leipzig. B. G. Teubner. 1920).

J. Haag, Cours complet de Mathématiques speciales. Tome 2. Géométrie (Paris. Gauthier-Villars et Cie. 1921).

Fundamenta Mathemat cae. Tom. 1—2. Warzawa 1920—21. 224 + 280 p.

Dette ny meget smukt udstyrede Tidsskrift behandler udelukkende Spørgsmaal vedrørende Mængdelæren.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google